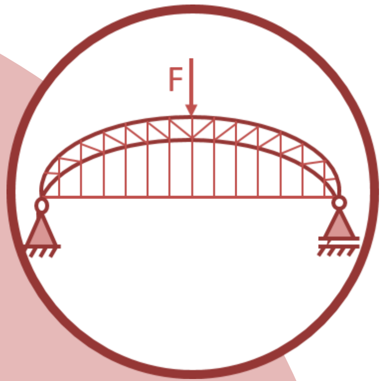
Universität Stuttgart
Institut für Erziehungswissenschaft

MINT Teacher Lab



Lehr- und Lernmaterialien für

Naturwissenschaft und Technik (NwT)

Zendler | Brändle

Lösungsheft

Technische Mechanik

Stuttgart, Februar 22

Redaktionelle Bearbeitung

Wissenschaftliche Leitung	Prof. Dr. Bernd Zinn, Universität Stuttgart
Autoren	Sina Zendler und Marcus Brändle
Inhaltliche / fachliche Unterstützung	Prof. Dr. Bernd Zinn und Mira Latzel
Hilfskräfte	Jan Nowak
Lektorat	Mira Latzel und Marcus Brändle

Die vorliegenden Lehr- und Lernmaterialien zum Themenbereich *Technische Mechanik* wurden am Institut für Erziehungswissenschaft der Universität Stuttgart entwickelt und fokussieren die Weiterbildung von Lehrkräften im gymnasialen Unterrichtsfach Naturwissenschaft und Technik (NwT). Die Materialentwicklung erfolgte im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung im Projekt *Lehrerbildung Plus* mit einer Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung (FKZ: 01JA1607A). Die Weiterbildung von Lehrkräften erfolgt im Projekt *MINT-Teacher Lab* an der Universität Stuttgart. Das *MINT-Teacher Lab* wird von der Vector Stiftung gefördert und sieht neben der Konzeptionierung eines modernen schulischen Klassenraums die Unterstützung der professionsorientierten Lehreraus- und Weiterbildung in den MINT-Lehramtsfächern im Großraum Stuttgart-Ludwigsburg vor.

Die konzipierten Lehr- und Lernmaterialien bieten zum einen in den Kapiteln 5 und 6 mit den Themen *Die Kraft* und *Drehmomente* eine grundlegende Einführung in den Themenbereich *Technische Mechanik* und sind als Basiswissen der gymnasialen Oberstufe für die Klassenstufen des Profilfachs in der Mittelstufe bzw. für Wiederholungseinheiten in der Kursstufe angedacht. Curricular aufbauend darauf folgen mit den Kapiteln 7, 8, 9 und 10 die Themen *Statik*, *Festigkeitslehre*, *Dynamik* und *Reibung*, welche im Bezugsfeld des Bildungsplans für die vier- bzw. fünfstündige Kursstufe der gymnasialen Oberstufe ausgearbeitet wurden und die darin aufgeführten inhaltsbezogenen Kompetenzen zur *Technischen Mechanik* in ihrer Gänze abdecken. Zu den einzelnen Themen wurden Aufgabenbatterien konzipiert, die die theoretischen Aspekte der *Technischen Mechanik* jeweils aufgreifen, auf Basis von Experimenten und beispielhaften ingenieurswissenschaftlichen Anwendungsbezügen veranschaulichen und so zu deren Absicherung beitragen. In jedem Kapitel wird zudem ein Exkurs exemplarisch zur praktischen Umsetzung oder Anwendung vorgestellt, der ergänzend zu den theoretischen Inhalten in der Unterrichtspraxis behandelt werden kann. Für das Kapitel *Dynamik* steht zur praktischen Veranschaulichung eines Elektromotorprüfstands am Beispiel des *GreenTeams* der Universität Stuttgart zusätzlich ein digitales Selbstlernmodul zur Verfügung.

Impressum

Herausgeber: Prof. Dr. Bernd Zinn und Mira Latzel

MINT-Teacher Lab

Universität Stuttgart
Institut für Erziehungswissenschaft
Berufspädagogik mit Schwerpunkt Technikdidaktik (BPT)
Azenbergstraße 12
70174 Stuttgart

Internetseite: http://www.uni-stuttgart.de/bpt/

E-Mail: mtl@ife.uni-stuttgart.de

Druck und Vertrieb: MINT-Teacher Lab

Universität Stuttgart
Institut für Erziehungswissenschaft
Berufspädagogik mit Schwerpunkt Technikdidaktik (BPT)
Azenbergstraße 12
70174 Stuttgart

Internetseite: http://www.uni-stuttgart.de/bpt/

E-Mail: mtl@ife.uni-stuttgart.de

Lehrerbildung PLUS

MINT Teacher Lab

Gefördert vom

Bundesministerium für Bildung und Forschung

Gefördert von

vector Stiftung

Blatt 5-1: Was ist eine Kraft?

Zeichnen und Berechnen von Kräften unter Einbezug der Newton´schen Axiome

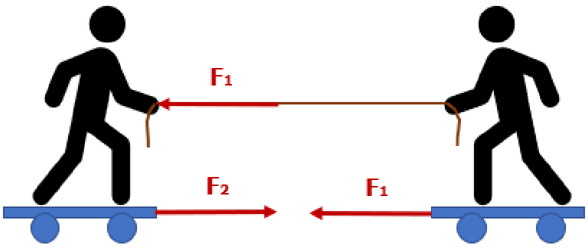


Abbildung 1: Lösung Aufgabe 5-1 a

Aufgabe 1:

a) Setze mit deinem Partner den oben abgebildeten Versuch um oder führe ein Gedankenexperiment durch: 2 Personen ähnlicher Masse stehen auf einem Skateboard und halten ein Seil in den Händen. Es zieht nur die linke Person an dem Seil, die Rechte hält es nur in der Hand fest. Was kannst Du beobachten und mit welchem Newton´schen Axiom lassen sich diese Beobachtungen begründen? Zeichne die Reaktionskräfte in die Abbildung ein.

Zieht Person 1 am Seil, so werden trotzdem beide aufeinander zu bewegt. Es entsteht also eine gleich große, entgegengesetzte Kraft mit dem gleichen Betrag, die auf Person 1 gerichtet ist. Die Beobachtung wird durch das 3. Newtonsche Axiom begründet (kurz: actio = reactio). Die Aktionskraft entspricht in diesem Fall der Kraft F_1, die Reaktionskraft der Kraft F_2.

b) Ein stehender Mensch mit der Masse m = 60 kg übt auf den Boden eine Gewichtskraft G aus, die durch die Erdanziehung zustande kommt. Berechne diese.

$$F_G = m \cdot g = 60\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 588{,}6\,\mathrm{N}$$

c) Wie kann die Einheit N durch die Einheiten kg, m und s dargestellt werden? Beschreibe die Einheit in eigenen Worten.

$F = m \cdot a$ oder in Einheiten ausgedrückt $\mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

1 N Kraft kann eine Masse von 1 kg innerhalb 1 s aus der Ruhe auf eine Geschwindigkeit von 1 m/s beschleunigen.

d) Zeichne eine Kraft mit den folgenden Eigenschaften:

- Die Wirkungslinie (gestrichelt zeichnen) der Kraft ist 20° zur Horizontalen geneigt
- Der Betrag ist 50 kN (Maßstab: 1 cm = 10 kN)
- Die Kraftrichtung wird durch einen Pfeil gekennzeichnet.

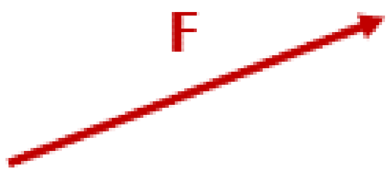


Abbildung 2: Lösung Aufgabe 5-1 d

Kopfnussaufgabe 1:

Buffalo Bill schoss der Legende nach während er ritt mit seinem Gewehr senkrecht nach oben in die Luft und fing die Kugel dann in seinem Gewehrlauf wieder auf. Begründe unter Einbezug der Newtonschen Axiome, ob das wirklich möglich ist.

Theoretisch kann die Legende von Buffalo Bill durchaus der Wahrheit entsprechen. Voraussetzung dafür ist eine gleichförmige und nicht beschleunigte Bewegung des Pferdes. Die Basis dafür liefert das 1. Newtonsche Gesetz, nach dem ein Körper seine Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit beibehält, solange keine äußere Kraft auf ihn einwirkt.

TIPP

Für die Darstellung der Einheit N kann das Grundgesetz der Dynamik hilfreich sein.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 5-2: Kräfteaddition

Die grafische und analytische Zusammensetzung von Kräften zu einer Resultierenden.

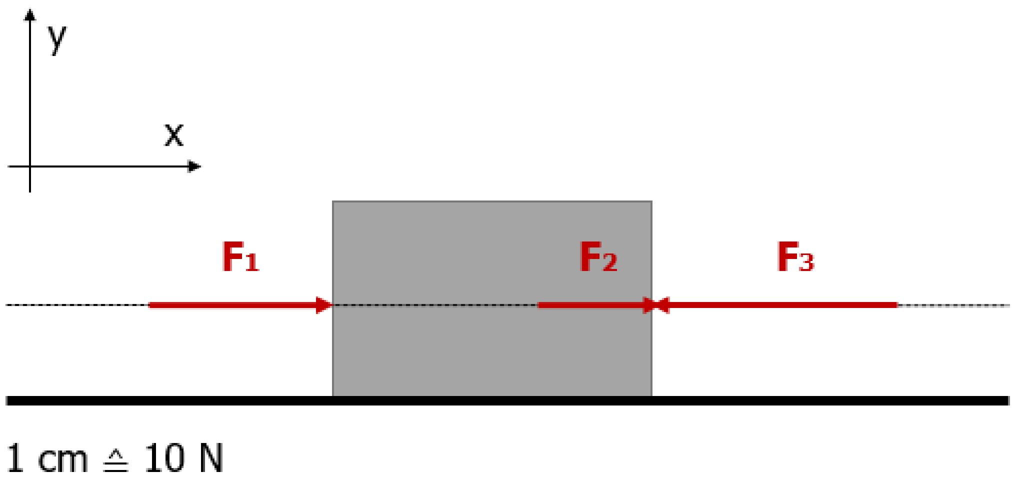


Abbildung 3: Kräfte auf einer Wirkungslinie

Aufgabe 2:

a) Die drei Kräfte F_1, F_2 und F_3 greifen an dem oben abgebildeten starren Körper an. Fasse die Kräfte einmal analytisch (rechnerisch) und einmal grafisch zu einer einzelnen resultierenden Kraft zusammen. Ermittle, in welche Richtung der Klotz verschoben wird.

Analytische Lösung:

$F_{res} = F_1 + F_2 - F_3 = 23\text{ N} + 14\text{ N} - 31\text{ N} = 6\text{ N}$

Der Klotz wird in die positive x-Richtung, also nach rechts, verschoben.

Grafische Lösung: 1 cm entspricht 10 N.

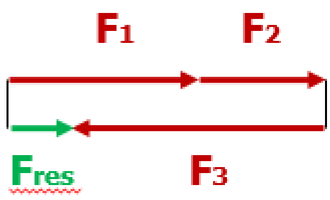


Abbildung 4: Lösung Aufgabe 5-2 a

b) Die angreifenden Kräfte liegen nun nicht mehr auf einer Wirkungslinie. Bestimme mit Hilfe eines Kräfteplans erneut grafisch die resultierende Kraft F_{res}. Ermittle in welche Richtung der Klotz jetzt geschoben wird.

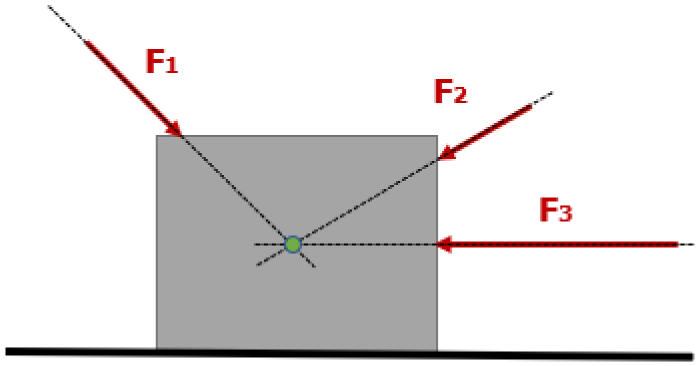


Abbildung 5: Übung zur Bestimmung der Resultierenden

Da die resultierende Kraft F_{res} in die negative x-Richtung zeigt, wird der Klotz dieses Mal nach links verschoben.

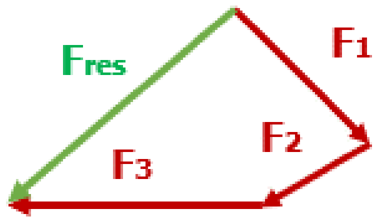


Abbildung 6: Lösung Aufgabe 5-2 b

Kopfnussaufgabe 2:

Begründe, ob es eine Rolle für die Richtung und den Betrag der Resultierenden spielt, in welcher Reihenfolge Du die Einzelkräfte im Kräfteplan aneinanderreihst.

In welcher Reihe die Einzelkräfte aneinander gereiht werden spielt für den Betrag und die Richtung der Resultierenden keine Rolle. Das kannst Du einfach selbst ausprobieren, indem Du die Kräfte in einer unterschiedlichen Reihenfolge aneinanderreihst.

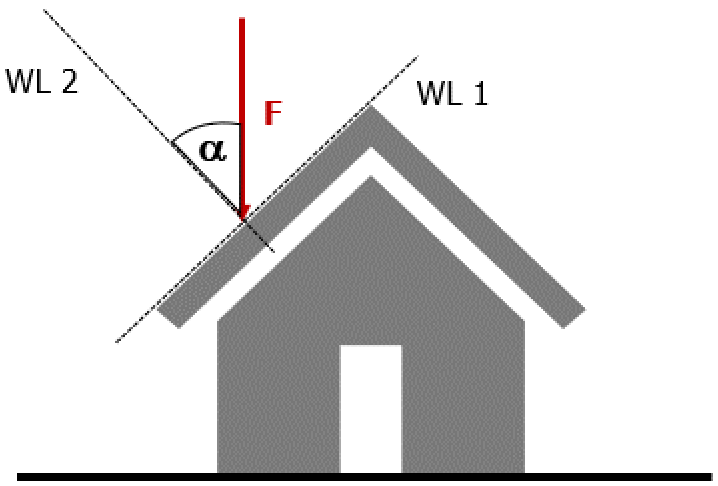
TIPP

Tipp: Beachte in welche Richtungen die Kräfte zeigen. Orientiere Dich beim Rechnen an den Vorzeichen des Koordinatensystems!

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 5-3: Wie zerlegt man eine Kraft?

Die grafische und analytische Zerlegung von Kräften.



1 cm ≙ 250 N

Abbildung 7: Haus mit Last

(angelehnt an Mahringer, W. 2013, S. 25 f.)

Aufgabe 3:

a) Durch eine Schneelast wirkt auf das Dach eines Hauses die Kraft F mit $F = 625$ N. Der Winkel α entspricht der Dachneigung und beträgt 45°. Zerlege die Kraft F grafisch in ihre Einzellasten entsprechend den vorgegebenen Wirkungslinien (WL). Bestimme den Betrag der Kraftkomponenten.

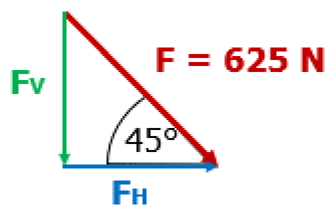


Abbildung 8: Lösung Aufgabe 5-3 a

1 cm ≙ 250 N, durch Messen: $F_V \approx F_H \approx 1{,}8$ cm

$F_V = 1{,}8 \cdot 250\ \text{N} \approx 450\ \text{N}$

$F_H = 1{,}8 \cdot 250\ \text{N} \approx 450\ \text{N}$

b) Überprüfe das Ergebnis nun rechnerisch mit Hilfe der Winkelsätze.

$$F_v = \sin(\alpha) \cdot F = \sin(45) \cdot 625\ \mathrm{N} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 625\ \mathrm{N} = 442\ \mathbf{N}$$

$$F_H = \cos(\alpha) \cdot F = \cos(45) \cdot 625\ \mathrm{N} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 625\ \mathrm{N} = 442\ \mathbf{N}$$

Kopfnussaufgabe 3:

Zwei Personen tragen gemeinsam einen Koffer. Zerlege die Kraft *F* entsprechend den vorgegebenen Wirkungslinien. Begründe, welche Person mehr Gewicht trägt.

Die Person mit dem Anteil der grünen Kraft trägt mehr Gewicht, da der Betrag (Pfeillänge) der Kraft größer ist.

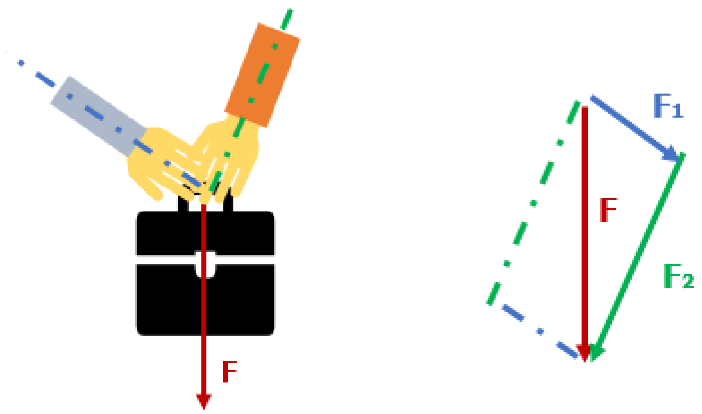


Abbildung 9: Lösung Aufgabe 5-3 Kopfnuss

Tipp: Bei der Zerlegung der Kraft entsteht jetzt kein Rechteck mehr, sondern ein Parallelogramm.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Exkurs: Brücken verbinden I

Eine Brücke beschriften, die Aufgaben der einzelnen Komponenten benennen sowie die Belastungsarten vergleichen.

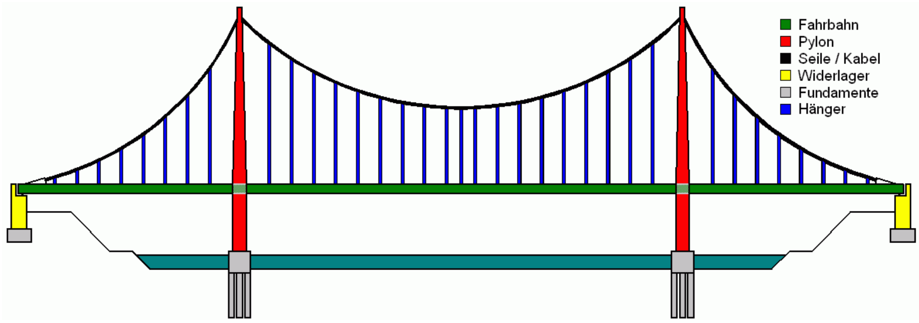


Abbildung 10: Lösung Exkurs Brücken verbinden 1-a

(https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/33/Suspension_bridge_pattern_german.png)

Aufgabe 1:

a) Beschrifte die Teile der oben abgebildeten Brücke. Nenne die Aufgaben der einzelnen Komponenten.

Wichtig sind bei der Beschriftung außerdem noch die Auflager zwischen den Pylonen und den Stützen im Wasser. Alles über der Fahrbahn gehört dem Überbau an.

Fahrbahn/ Träger: Auf ihm fahren die Autos oder laufen die Menschen, leitet Kräfte als Druckkräfte zu den Stützen.

Widerlager: sichern die Brücke gegen ein Wegrutschen, schränken Freiheitsgrade ein.

Stützen: nehmen die Druckkräfte des Trägers auf und leiten sie zum Boden.

Seile: an ihnen sind die Fahrbahnhänger befestigt, werden nur auf Zug belastet und über Pylone geführt.

Lager: schränken Bewegungen der Brücke ein, nehmen Kräfte auf und leiten diese sicher in den Untergrund ab.

Hänger: verbinden die Fahrbahn mit den Seilen, leiten Kräfte in Form von Zugkräften zu den Seilen weiter.

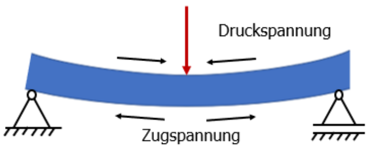
Pylone: besondere Art an Stützen, die die Seile tragen

b) Begründe, um was für eine Brückenart es sich dabei handelt.

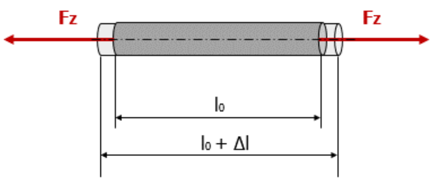
Es handelt sich hierbei um eine Hängebrücke, da zwischen den Pylonen ein Tragseil aufgehängt wird. Senkrechte Seile tragen die Fahrbahn.

c) Erläutere welchen Kräftearten die Brücke ausgesetzt wird. Nenne Unterschiede zwischen den Kräftearten und fertige jeweils eine Skizze an.

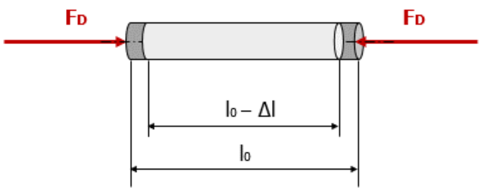
Die Fahrbahn der Brücke wird zum einen durch eine Biegebelastung belastet. Bei einer Biegung treten sowohl Zug-, als auch Druckkräfte auf, die zu einer Spannung im Bauteil führen. Die Kraft steht senkrecht auf dem Träger.



Außerdem werden die Seile und Hänger durch Zugkräfte belastet. Diese Kraft zieht in Richtung der Bauteilachse. Der belastete Körper wird verlängert.



Bei der dritten Belastungsart handelt es sich um Druckkräfte, die beispielsweise die Stützen der Brücke belasten. Die Kraft wirkt, wie auch die Zugkraft, in Richtung der Stabachse. Die Folge ist eine Verkürzung des Bauteils.



Kopfnussaufgabe 1:

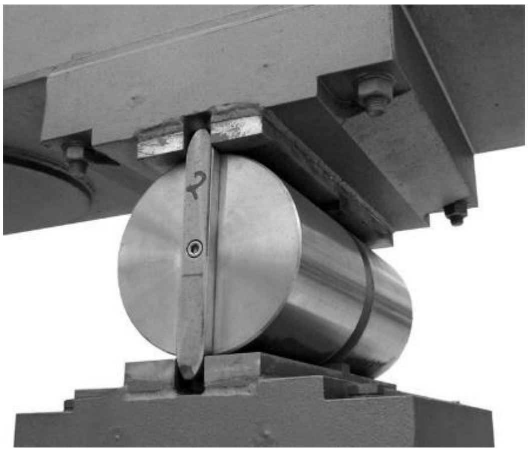


Abbildung 11: Brückenkomponente

(https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lager_01_KMJ.jpg; KMJ / CC BY-SA)

Begründe, um was für ein Brückenbestandteil es sich hierbei handeln könnte. Stelle Vermutungen auf, warum die zwei Brückenteile hier nicht einfach fest miteinander verbunden sind.

Es handelt sich um ein Auflager. Auflagerflächen, die Gewichte tragen, werden hierdurch miteinander verbunden. Sie dienen der Einschränkung der Freiheitsgrade und verhindern somit Bewegungen. Durch die auftretenden Kräfte an einer Brücke können sich Bauteile verkürzen oder verlängern. Die Folge sind Spannungen in der Brücke. Auflager können beispielsweise in eine Richtung beweglich sein, wodurch die Kräfte besser ausgeglichen werden können. Man bezeichnet das als Loslager.

TIPP

Tipp: Welche Gefahren könnten auftreten, wenn die Brückenkomponenten starr miteinander verbunden wären?

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

MINT Teacher Lab

Exkurs: Brücken verbinden II

Den statischen Aufbau von Brückenarten analysieren sowie deren Einsatz kennen.

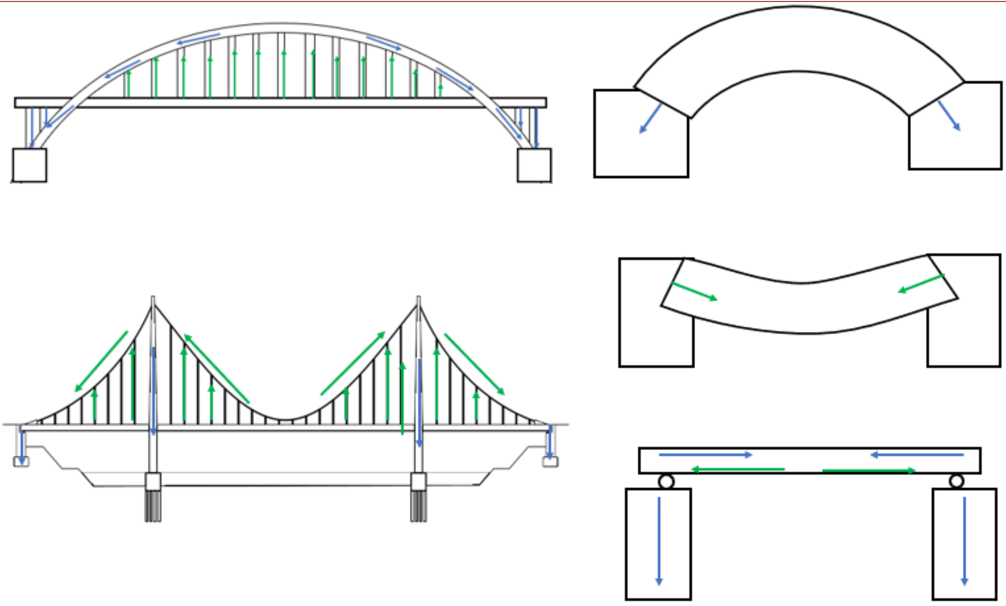


Abbildung 12: Lösung Exkurs Brücken Verbinden 2-b

(https://commons.wikimedia.org/wiki/File:H%C3%A4ngebr%C3%BCcke_Schema.svg, angelehnt an https://www.leifiphysik.de/mechanik/kraefteaddition-und-zerlegung/ausblick/bruecken)

Aufgabe 2:

a) Benenne die oben abgebildeten Brückenarten. Lese Dir den Informationstext genau durch und mache Dir Notizen wie die einzelnen Brücken statisch aufgebaut sind und wo sie hauptsächlich eingesetzt werden.

1. Bogenbrücke: hier mit Hängern und Stehern, Hänger werden auf Zug beansprucht, Rest siehe Punkt 2
2. Bogenbrücke: bogenförmig, meist aus Beton, wird aufgrund der Bauform nur auf Druck belastet, Einsatz bei tiefen Tälern, Stützweiten bis zu 500 m

3. Hängebrücke: auf Biegung belastet und Druck, Tendenz zu großen Verformungen, Einsatz bei der Überbrückung breiter schiffbarer Gewässer mit Stützweiten oberhalb von 800 m, in unebenen Geländen zur Überbrückung von riesigen Schluchten
4. Schrägseilbrücke: besondere Form der Hängebrücke mit Pylonen, Hängern und Tragseilen, anfällig gegen Windschwingungen, Überbrückung breiter Gewässer mit Stützweiten zwischen 200 m und 1000 m
5. Balkenbrücke: einfache Fertigung, Balken wird auf Biegung beansprucht, daher hohe Zug- und Druckkräfte, Einsatz nur bei kleinen bis mittleren Stützweiten (ca. 80 m), geringe Spannweiten.

b) Analysiere die Brücke unter statischen Gesichtspunkten. Zeichne in die Skizze mit Pfeilen ein, wo Zugkräfte (grün) und Druckkräfte (blau) auftreten. Berücksichtige dabei, dass bei einer statisch stabilen Brücke alle Kräfte über die Auflager und Widerlager in den Untergrund abgeleitet werden müssen.

Kopfnussaufgabe 2:

Erläutere, warum Dreieckskonstruktionen in der Baustatik so häufig eingesetzt werden.

Ein Dreieck ist die kleinste starre Konstruktion. Man kann ein Dreieck also nicht verformen ohne es zu verbiegen. Alle drei Seiten stützen sich sozusagen gegenseitig und schränken die Bewegungsmöglichkeiten ein. Dadurch erhält man eine stabile Konstruktion bei gleichzeitig geringem Materialverbrauch.

TIPP

Tipp: Forme einen Meterstab zuerst zu einem Viereck und dann zu einem Dreieck und vergleiche Deine Beobachtungen.

Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Exkurs: Brücken verbinden III

Fachwerkkonstruktionen benennen, die Kräfteableitung darin analysieren und einfache Kräfteberechnungen dazu durchführen.

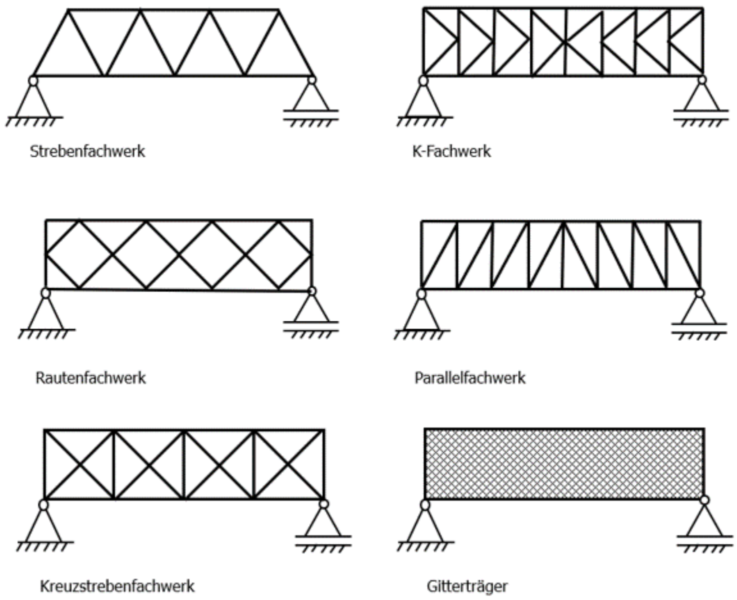


Abbildung 13: Fachwerkstypologien

(angelehnt an Vorlesung Baukonstruktion)

Aufgabe 3:

a) Nenne die Vorteile einer Fachwerkkonstruktion.

Fachwerkkonstruktionen haben einen geringen Materialverbrauch und werden ausschließlich auf Zug und Druck belastet. Sie sind somit gut berechenbar und ressourcenschonend.

b) Ordne die Fachwerkstypologien den unten abgebildeten Brücken zu.

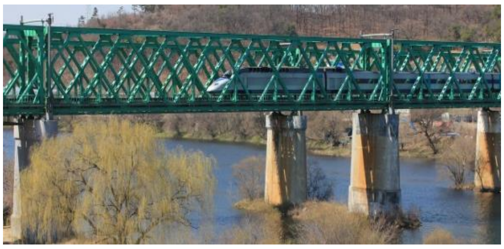
https://www.flickr.com/photos/brickpit/30478678820/

Lutz Marl / CC BY-NC-SA 2.0

Parallelfachwerk

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Skibbereen-trussbridge.jpg
Störfix / CC BY-SA

Kreuzstrebenfachwerk ohne Stützen



Rautenfachwerk

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hochbr%C3%BCcke_Brunsb%C3%BCttel-01.JPG#/media/Datei:Hochbrücke_Brunsbüttel-01.JPG_
von Mehlauge / CC BY-SA 3.0

Strebenfachwerk

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9e/Viaduc_ferroviaire_-_Busseau-sur-Creuse%2C_Ahun%2C_Creuse%2C_France.JPG
Sebleouf / CC BY-SA

Gitterträger

Strebenfachwerk mit einer Stütze

c) Nenne Beispiele wo Fachwerkkonstruktionen außerhalb des Brückenbaus eingesetzt werden.

Kran, Häuserbau, Gerüste, etc.

d) Schaue Dir die Animation zur Kräfteübertragung in einer Fachwerkkonstruktion an und beschreibe wie die Kräfte, die der LKW auf die Brücke ausübt, in den Untergrund abgeleitet werden. Analysiere, um welche Kräfte es sich jeweils bei den verwendeten Farben handelt und zeichne in die Abbildung 14 ein welche Stäbe auf Zug und welche auf Druck belastet werden.

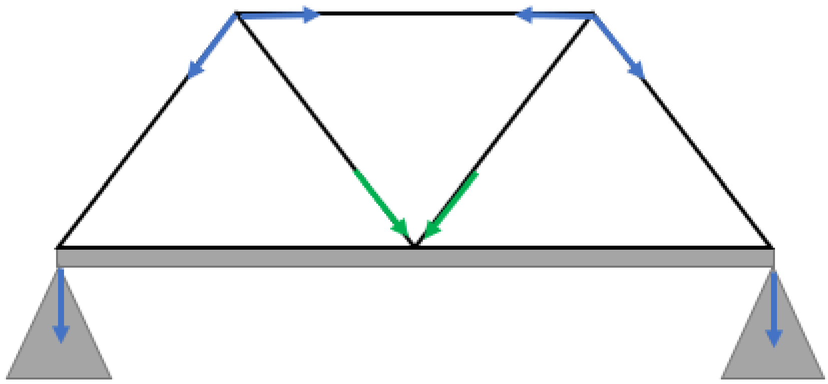


Abbildung 14: Lösung Exkurs Brücken verbinden III Aufgabe 3-d
(angelehnt an: https://www.leifiphysik.de/mechanik/kraefteaddition-und-zerlegung/ausblick/bruecken)

Grün = Zugkräfte, blau = Druckkräfte

1) Die Gewichtskraft wird in Richtung der Träger zerlegt.
2) Die Komponenten der Gewichtskraft werden in Richtung der Träger verschoben. Es handelt sich um Zugkräfte.
3) Die Zugkräfte werden in Druckkräfte umgewandelt und in die angrenzenden Träger weitergeleitet.
4) Die Druckkräfte an dem horizontalen Balken heben sich auf.
5) Die Druckkräfte an den äußeren Balken werden zu den Auflagern abgeleitet.

Kopfnussaufgabe 3:

Ermittle, welche Kraft das rechte und linke Lager aufnehmen muss, wenn ein LKW mit einer Masse von 12 t ein Viertel der Brückenlänge zurückgelegt hat.

$$F_G = m \cdot g = 12000\ \mathrm{N}\ \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 117.720\ \mathrm{N}\ \approx 118\ \mathrm{kN}$$

Das linke Auflager muss 75 % der Kraft aufnehmen, also 88,5 kN und das Rechte dann die restlichen 25 % (29,5 kN).

Tipp: Überlege Dir welches der Lager um wie viel stärker belastet wird.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Exkurs: Brücken verbinden IV

Eine Brücke ohne Verbindungsmittel konstruieren und den Aufbau einer Leonardobrücke analysieren.

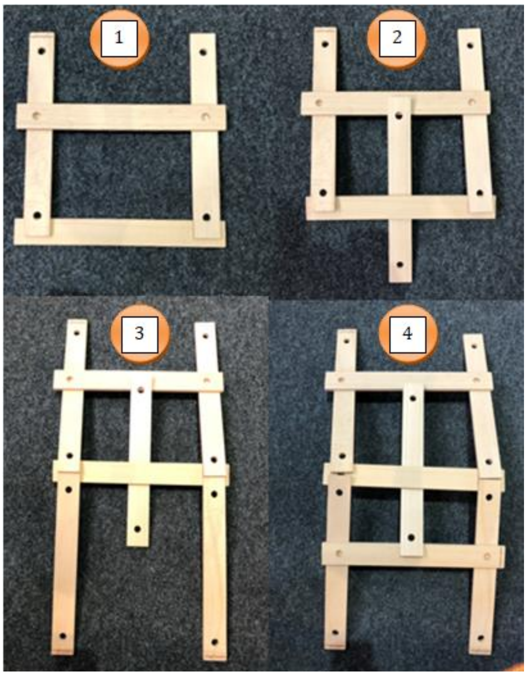


Abbildung 15: Bauanleitung Leonardobrücke

(https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonardo-Br%C3%BCcke_Strategie.png; GoeAl95 / CC BY-SA)

Aufgabe 4:

Die Leonardobrücke ist eine bogenförmige Brücke, die auf Leonardo da Vinci zurückgeht. Um sie zu bauen benötigt man keinerlei Verbindungsmittel wie Leim oder Nägel.

a) Konstruiere ohne Verbindungsmittel nur aus den Dir zur Verfügung stehenden Stäben eine Brücke, mit der Du ein Hindernis von 20 cm überbrücken kannst. Fertige eine Skizze Deiner Konstruktion an.

   Hier gibt es verschiedene Lösungsmöglichkeiten. Solange die Brücke stabil ist, ist Deine Lösung richtig.

b) Nehme nun die Bauanleitung (s. Abbildung 15) zur Hand und baue die Brücke gemäß Leonardo da Vincis Prinzip nach.

c) Analysiere und beschreibe das Funktionsprinzip dieser Konstruktion. Ziehe in Deine Überlegungen mit ein, warum hier keine Verbindungsmittel benötigt werden.

Die Brücke basiert auf einer Art Flecht- bzw. Stützprinzip. Es entsteht eine Spannung in den einzelnen Stäben wodurch sich die Stäbe gegenseitig stützen. Wird die Brücke belastet, so verkeilen sich die Stäbe stärker. Auch die Reibung, die das Abrutschen der Stäbe verhindert, ist hier von großer Bedeutung. Dieses Prinzip wird auch als Selbsthemmung bezeichnet.

d) Kann man mit dieser Form der Brücke auch sehr breite Flüsse überbrücken? Begründe und versuche es selbst.

Je länger man die Brücke baut, desto steiler wird sie. Daher stößt man bei sehr breiten Flüssen mit dieser Konstruktion an seine Grenzen.

e) Die Leonardobrücke wurde ursprünglich für das Militär, das weite Strecken zurücklegt, erfunden. Nenne diesbezüglich Vorteile dieser Brückenbauart.

Die Brücke kann einfach auseinander und ganz ohne Verbindungsmittel wieder zusammengebaut werden. Es sind also keine Hilfsmittel nötig. Somit kann das Militär vor Ort diese Art der Konstruktion nutzen und damit Hindernisse überqueren.

Kopfnussaufgabe 4:

Konstruiere eine Brücke aus nur 4 gleich langen Brettern, mit der Du eine Schlucht überwinden kannst, die ein bisschen breiter ist als die Länge der Bretter. Fertige eine Skizze Deiner Konstruktion an.

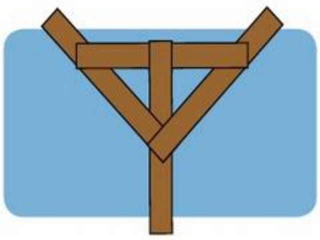


Abbildung 16: Lösung Exkurs Brücken verbinden V Kopfnuss

(https://www.science.lu/de/historisches-experiment/baue-eine-leonardo-bruecke https://www.mathematik.de/images/Blog/Dokumente/Mathe_im_Leben/LeonardobrueckeUniGraz2009.pdf)

Tipp: Reibung spielt hier eine große Rolle.

Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Exkurs: Brücken verbinden V

Brückenkonstruktion durch Simulation.

Aufgabe 5:

Mit der App „Bridge Constructor FREE" kannst Du deine statischen Fähigkeiten für den Bau von Brücken unter Beweis stellen. Deine Aufgabe ist es, Hindernisse geschickt mit Hilfe von verschiedenen Materialien zu überbrücken. Da Dir nur ein begrenztes Budget zur Verfügung steht, sollte Deine Konstruktion auch die wirtschaftlichen Gesichtspunkte mit einbeziehen. Nach jeder Konstruktion wird Deine Brücke einem Belastungstest mittels darüberfahrenden Fahrzeugen ausgesetzt. Lasse also Deiner Kreativität freien Lauf und wende Dein gelerntes Wissen geschickt an.

a) Lade Dir die App „Bridge Constructor FREE" auf Dein Handy und öffne diese. Die App gibt Dir automatisch wichtige Hinweise zur Bedienung.

b) Konstruiere die ersten 4 Brücken und fertige von jeder Brücke eine Skizze an, in der Du einzeichnest wie die Kräfte in die Auflager abgeleitet werden.
Hier gibt es verschiede Lösungsmöglichkeiten.

	c) Baue noch weitere Brücken. Vergleicht am Ende der Unterrichtsstunde wer die meisten Brücken mit dem geringsten Budget gebaut hat und damit den Architekturpreis gewinnt.	
TIPP	**Tipp: Dreieckstrukturen sind besonders stabil. Wenn Du während der Arbeit mit der App dein Internet ausschaltest, kannst Du unnötige Werbung verhindern.**	
	Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 6-1: Wie wirkt ein Hebel?

Herleitung des Hebelgesetzes.

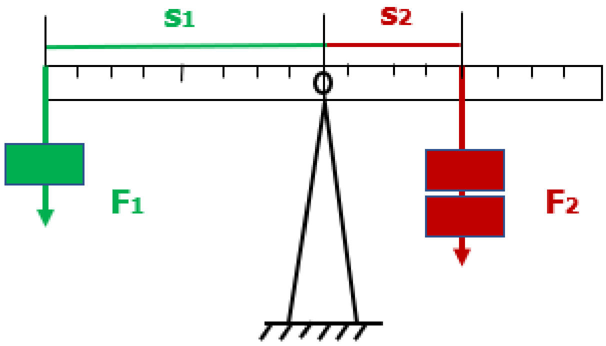


Abbildung 17: Aufbau Balkenwaage

Aufgabe 1:

a) Stelle den Gleichgewichtszustand durch eine verschiedene Anzahl der Gewichte und durch Änderung der Hebelarme an den beiden Hebeln dar. Wiederhole den Versuch vier Mal mit unterschiedlichen Massen und Abständen. Trage Deine Ergebnisse in die Tabelle ein.

Hier gibt es sehr viele richtige Lösungen. Einige Beispiele werden in der Tabelle aufgeführt:

Linkes Drehmoment		Rechtes Drehmoment	
Anzahl Massen m_1	Abstand s_1 [cm]	Anzahl Massen m_2	Abstand s_2 [cm]
1	2	2	1
3	2	6	1
4	3	2	6
2	2	1	4

b) Schaue Dir deine ermittelten Werte genau an und versuche einen Zusammenhang zwischen der rechten und linken Seite zu finden. Vervollständige die Regel: „Der Hebel befindet sich im Gleichgewicht, wenn …"

… das Produkt aus Kraftarm mal Kraft (bzw. Masse) und Lastarm mal Last gleich ist.

c) Bestimme mit Hilfe deiner formulierten Regel nun die fehlenden Angaben der unten abgebildeten zweiseitigen Hebel, ohne es an der Versuchsapparatur zu testen. Stelle eine Formel zur Berechnung der fehlenden Größen auf.

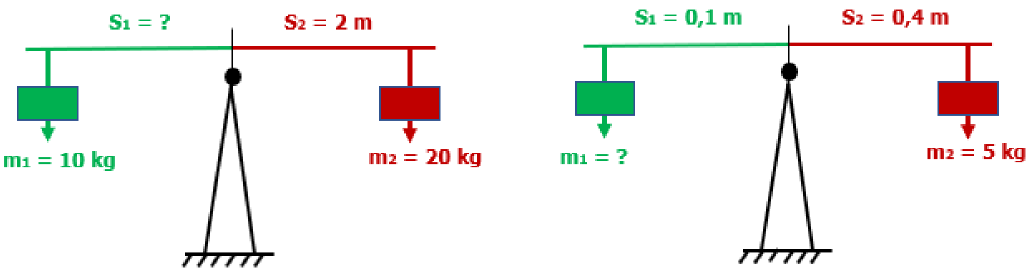


Abbildung 18: Übung zur Balkenwaage

$$s_1 \cdot m_1 = s_2 \cdot m_2$$

1.) $s_1 \cdot m_1 = s_2 \cdot m_2 \rightarrow s_1 = \frac{s_2 \cdot m_2}{m_1} = \frac{2\ \mathrm{m} \cdot 20\ \mathrm{kg}}{10\ \mathrm{kg}} = 4\ \mathrm{m}$

2.) $s_1 \cdot m_1 = s_2 \cdot m_2 \rightarrow m_1 = \frac{s_2 \cdot m_2}{s_1} = \frac{0{,}4\ \mathrm{m} \cdot 5\ \mathrm{kg}}{0{,}1\ \mathrm{m}} = 20\ \mathrm{kg}$

Kopfnussaufgabe 1:

Ein Partner hängt in einem von ihm gewählten Abstand s_1 eine beliebige Masse m_1 an die oben abgebildete Versuchsapparatur. Der zweite Partner soll nur durch überlegen die entsprechende Masse m_2 und den Abstand s_2 ermitteln, um die Balkenwaage im Gleichgewicht zu halten. Das Ergebnis kann anschließend durch das Anbringen der Gewichte überprüft werden.

Deine Ergebnisse kannst Du selbst mit Hilfe der Balkenwaage überprüfen.

TIPP

Um den Gleichgewichtszustand zu erlangen, muss das linke Drehmoment gleich dem rechten Drehmoment sein.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 6-2: Mit einem Hebel die Welt anheben

Anwenden und Rechnen mit dem Hebelgesetz.

Abbildung 19: Wippe als realer Anwendungsfall des Hebelgesetzes

Aufgabe 2:

Asterix wettet mit dem dicken Obelix, dass er ihn mit Hilfe einer Wippe anheben kann. Da Obelix 200 kg und Asterix nur 60 kg wiegt, kann Obelix das nicht glauben und setzt sich entspannt auf die Wippe.

a) Erkläre wie Asterix es schaffen kann, Obelix tatsächlich nur mit Hilfe der Wippe und seinem Eigengewicht anzuheben.

Die Wippe stellt einen zweiseitigen Hebel dar. Hier kommt es auf das Drehmoment und nicht auf das Gewicht an. Wenn Asterix also im Vergleich zu Obelix weit genug hinten auf die Wippe sitzt (der Hebelarm lange genug ist), kann er so Obelix anheben, da sich das Moment aus Kraft (Gewichtskraft) mal Hebelarm berechnet.

b) Obelix sitzt 20 cm vom Drehpunkt entfernt auf der Wippe. Berechne wie weit Asterix vom Drehpunkt entfernt sitze muss, damit die Wippe ins Gleichgewicht kommt.

$$s_A \cdot m_A = s_O \cdot m_O$$

$$s_A = \frac{s_O \cdot m_O}{m_A}$$

$$s_A = \frac{20\ \mathrm{cm} \cdot 200\ \mathrm{kg}}{60}$$

$$s_A = 66{,}6\ \mathrm{cm}$$

c) Begründe was passiert, wenn Asterix näher an den Drehpunkt heranrückt.
Der Hebelarm von Asterix wird dann kürzer, wodurch das Drehmoment auch kleiner wird. Asterix kann Obelix somit nach einem bestimmten Abstand nicht mehr anheben.

Kopfnussaufgabe 2:

Bereits vor über 4500 Jahren bauten die Ägypter riesige Pyramiden mit einer Genauigkeit, die heutige Ingenieure stutzen lässt. Ein Steinblock wog dabei mehrere Tonnen und musste vom Boden bis auf 100 Meter Höhe transportiert werden und das alles ohne Maschinen! Hast Du eine Idee wie das möglich war?

Mit Hilfe einer Hebelwaage konnten schwere Blöcke durch einen langen Hebelarm angehoben werden. Wenn die Arbeiter nun den Hebelarm in Richtung des Pyramidenklotzes geringhalten und den Hebelarm in Richtung der Arbeiter dagegen lang, so wird weniger Kraft benötigt, um die schweren Steinblöcke nach oben zu heben.

Am zweiseitigen Hebel herrscht Gleichgewicht, wenn an beiden Seiten das Produkt aus Kraft und dem zugehörigen Hebelarm gleich ist.

Alles bearbeitet? Ergebnis kontrolliert?

Blatt 6-3: Hebel im menschlichen Körper

Rechnen mit ein- und zweiseitigen Hebeln.

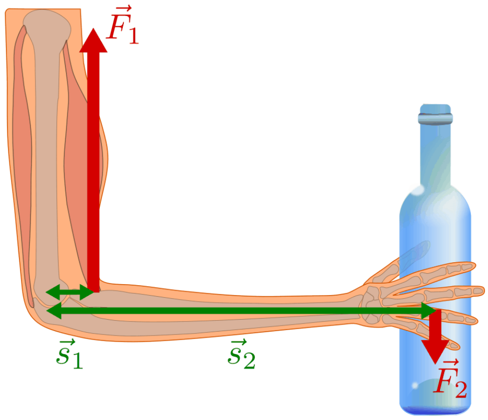


Abbildung 20: Der Arm als Hebel

(https://www.grund-wissen.de/physik/mechanik/kraftwandler-und-getriebe/hebel.html; Bernhard Grotz / CC BY-NC-SA 3.0)

Aufgabe 3:

a) Der Mensch in Abbildung 20 hält eine Flasche mit einem Gewicht von 1 kg in seiner Hand. Berechne, welche Kraft dabei auf den Muskel wirkt (mit: s_2 = 60 cm, s_1 = 7 cm).

$$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$$

$$F_1 = \frac{F_2 \cdot s_2}{s_1} = \frac{1\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0{,}6\,\text{m}}{0{,}07\,\text{m}} = 84{,}1\,\text{N}$$

b) Begründe, ob es sich um einen ein- oder zweiseitigen Hebel handelt.

Es handelt sich um einen einseitigen Hebel, da Kraft- und Lastarm auf einer Seite liegen. Außerdem liegt der Drehpunkt am Hebelrand.

Auch der Unterkieferknochen stellt einen einseitigen Hebel dar. Der Drehpunkt befindet sich am Kiefergelenk (1). Wenn sich der Mund schließt, zieht sich der Muskel in der Abbildung zusammen.

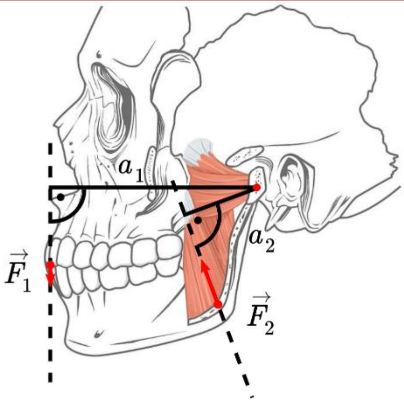


Abbildung 21: Lösung Aufgabe 6-3 c (https://www.leifiphysik.de/mechanik/einfache-maschinen/aufgabe/gut-gekaut | CC-BY 4.0)

a) Zeichne die Kraft des Muskels und den entsprechenden Hebelarm in die Abbildung ein.

b) Um welchen Betrag wird die Kraft des Muskels durch die Hebelwirkung verstärkt?

Beispielrechnung (nach Abmessen der Längen der Hebelarme):

$$V = \frac{Länge\ Kraftarm}{Länge\ Lastarm} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3{,}7\ \mathrm{cm}}{1{,}5\ \mathrm{cm}} = 2{,}5$$

c) Nenne Unterschiede zwischen einem ein- und einem zweiseitigen Hebel.

Bei einem einarmigen Hebel liegt der Drehpunkt am Hebelrand. Alle angreifenden Kräfte (Kraft und Last) liegen somit auf der Seite des Hebels. Bei einem zweiseitigen Hebel dagegen liegt die Last auf einer Seite des Drehpunktes und die Kraft auf der anderen Seite.

Kopfnussaufgabe 3:

Auch im Alltag benutzen wir häufig die Hebelwirkung. Überlege Dir vier Hebel, die Du zu Hause finden kannst und begründe jeweils, ob es sich dabei um einen einarmigen oder zweiarmigen Hebel handelt.

Schere: zweiarmig

Nussknacker: einarmig

Kran: zweiarmig

Schubkarre: einarmig

TIPP

Der Verstärkungsfaktor ergibt sich aus der Länge des Kraftarms geteilt durch die Länge des Lastarms.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 6-4: Hebel in der Technischen Mechanik

Berechnung des Drehmoments.

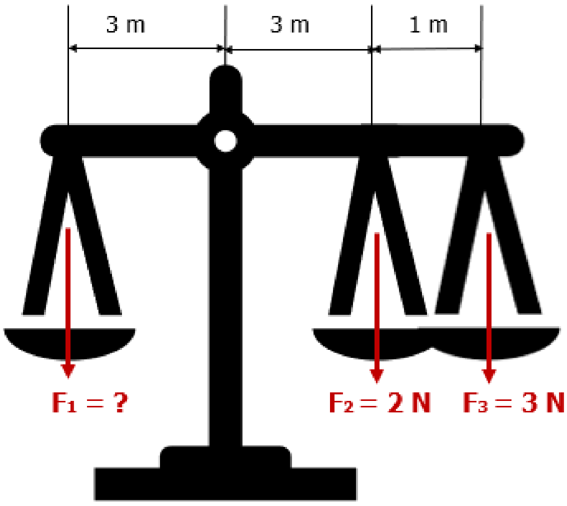


Abbildung 22: Anwendung Hebelgesetz

Aufgabe 4:

a) Berechne die Kraft F_1 so, dass die Waage im Gleichgewicht steht.

$$F_1 \cdot 3\ \mathrm{m} = F_2 \cdot 3\ \mathrm{m} + F_3 \cdot 4\ \mathrm{m}$$

$$F_1 = \frac{2\ \mathrm{N} \cdot 3\ \mathrm{m} + 3\ \mathrm{N} \cdot 4\ \mathrm{m}}{3\ \mathrm{m}} = 6\ \mathrm{N}$$

b) An den Balken in Abbildung 23 greifen zwei Kräfte und eine Linienlast an. Berechne den Abstand x so, dass der Balken gerade nicht kippt (gegeben: a = 1 m, F = $\frac{4}{\sqrt{2}}$ N, F_G = 9 N).

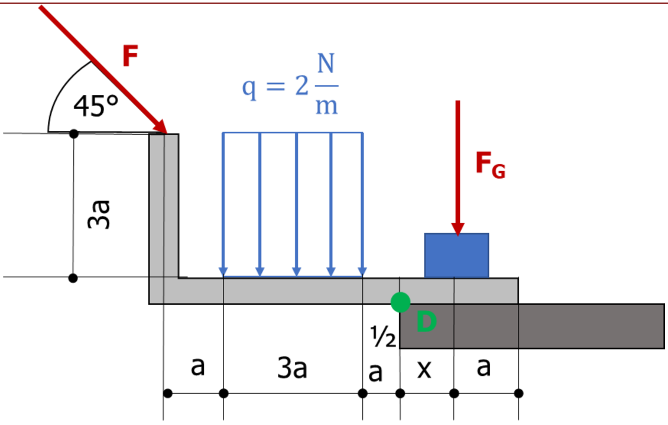


Abbildung 23: Momentengleichgewicht

$$R = 3a \cdot 2\frac{N}{m} = 3\,m \cdot\ 2\frac{N}{m} = 6\,N$$

$$F_V\ = F_H = \frac{\sqrt{2}}{2}\ F$$

$$M_D \circlearrowright = -F_V\ \cdot \left(a + 3a + \frac{1}{2}a\right) - R \cdot \left(1{,}5a + \frac{1}{2}a\right) + F_G \cdot x\ +\ F_H\ \cdot 3a\ = 0$$

$$M_D\ = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ F \cdot 4{,}5a - R \cdot 2a + F_G\ \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2}\ F \cdot 3a = 0$$

$$M_D\ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}}\ N \cdot 4{,}5a - 6\,N \cdot 2a + 9\,N\ \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}}\ N \cdot 3a = 0$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{9\,N\,m + 12\,Nm - 6\,Nm}{9\,N} = \mathbf{1{,}67\ m}$$

Kopfnussaufgabe 4:

Erläutere, wie man die Aufgabe auch ohne die Zerlegung der Kraft *F* hätte lösen können.

Man hätte den senkrechten Abstand der Wirkungslinie der Kraft F zu dem Drehpunkt bestimmen können. Das hätte zu dem gleichen Ergebnis geführt, ohne die Kraft F in ihre Komponenten zerlegen zu müssen.

TIPP

Der Hebelarm ist immer der senkrechte Abstand der Wirkungslinie der Kraft zum Drehpunkt. Auch Horizontalkräfte können ein Moment verursachen.

Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 6-5: Eine rätselhafte Geschichte

Anwenden des Hebelgesetzes

Abbildung 24: Eine rätselhafte Geschichte

Aufgabe 1:

Ein junges, hübsches Mädchen kam in die Hölle. Der Teufel wollte die Schöne für immer bei sich behalten. Eines Tages aber bat und flehte das Mädchen, „lasse mich gehen, ich kann nicht bei dir bleiben, hier bin ich unglücklich und meine Schönheit wird bald vergehen." Aber der Teufel wollte das Mädchen nicht einfach so gehen lassen. „Wenn du folgende Aufgabe löst, dann öffne ich dir die Tür, die dich zurück in deine Welt führt", sagte der launige Höllenchef. Da er selbst schon Jahre über der Aufgabe brütete und keine Lösung fand, war er guter Hoffnung, dass auch das Mädchen daran verzweifelte. Der Teufel kramte aus einer Truhe neun äußerlich völlig gleich aussehende Kugeln hervor. Daneben stellte er eine einfache Balkenwaage mit zwei glänzenden Schalen. Beide beobachteten die Waage so lange, bis sich die Schalen nicht mehr bewegten und ihre Oberkanten eine gerade Linie bildeten. „Sie funktioniert perfekt" murmelte der Teufel. „Unter diesen neun Kugeln ist **EINE**, die schwerer ist als die acht anderen. Du hast **zwei** Versuche mit der Hebelwaage herauszufinden, welche Kugel es ist." Das verbitterte Mädchen weinte und war voller Entsetzen über das Wissen, dass sie die Aufgabe nicht lösen könnte. Ihr Peiniger zog sich freudig erregt zurück. Wie in Trance erhob sich das Mädchen aus ihrer Lethargie, leerte die gefüllten Schalen, legte eine neu definierte Anzahl Kugeln wieder hinein und verfolgte mit ihren Augen die Reaktion der Waage. Nach der zweiten Wägung standen dem Teufel die Haare zu Berge und als ihm seine Angebetete die Kugel, die ein anderes Gewicht als die acht anderen hatte, überreichte, war er verblüfft, aber hielt sein Versprechen und entließ die Schöne aus der Hölle.

(Quelle: http://www.oldiemusik-weimar.de/fun/spiele/index.html#)

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Erkläre, wie das Mädchen die Aufgabe gelöst hat.

Lege jeweils 3 Kugeln auf eine Seite der Balkenwaage. Nun gibt es zwei Möglichkeiten: bleibt die Waage im Gleichgewicht, befindet sich die Kugel mit dem unterschiedlichen Gewicht unter denen, die nicht auf der Waage liegen. Ist die Waage dagegen im Ungleichgewicht, dann ist die schwerere Kugel unter den 3 Kugeln, die die Waagschale weiter nach unten drücken. Wenn Du nun 2 der in Frage kommenden Kugeln wiegst und diese im Gleichgewicht sind, muss es die dritte Kugel sein. Ist die Waage dagegen nicht im Gleichgewicht, so drückt die schwerere Kugel wieder die Waagschale nach unten – diese Lösung ist Dein Fahrschein aus der Hölle 😉.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Der Teufel gab der Schönen auch keinen Tipp 😉</td></tr>
<tr><td></td><td>Alles bearbeitet? ☐</td><td>Ergebnis kontrolliert? ☐</td></tr>
</table>

Blatt 7-1: Immer mit der Ruhe…

Die Grundlagen der Statik (wie das Zerlegen einer Kraft) und die drei Gleichgewichtsbedingungen der Statik anwenden.

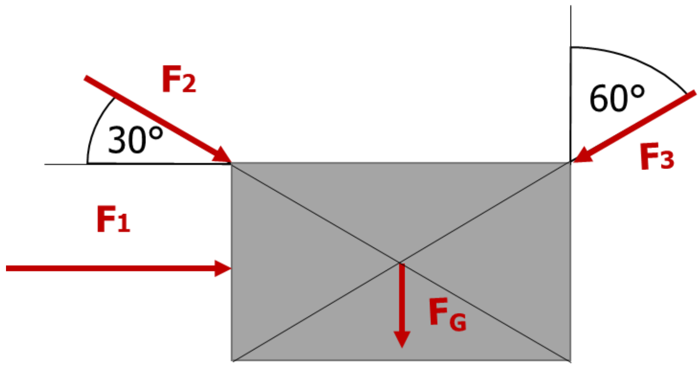


Abbildung 25: Übung Gleichgewichtskraft

Aufgabe 1:

a) Der Klotz mit einer Masse m von 3 kg wird durch die Kräfte F_1 bis F_3 belastet. Zeichne die nötige Gleichgewichtskraft ein, um den Klotz im Gleichgewicht zu halten. Berücksichtige dabei auch die Gewichtskraft G des Klotzes (1 cm ≙ 20 N). Berechne anschließend die nötige Gleichgewichtskraft.

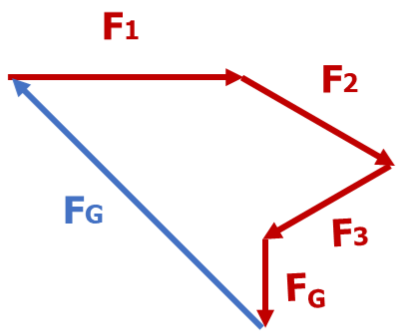


Abbildung 26: Lösung Aufgabe 7-1 a

$$F_G = m \cdot g = 3\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 30\ \mathrm{N}$$

Da 1 cm ≙ 20 N hat die Gewichtskraft somit einen Betrag von 1,5 cm. Durch Messen erhält man nun den Betrag der Gleichgewichtskraft: 6 cm · 20 N pro cm = 120 N.

b) Zerlege die Gleichgewichtskraft rechnerisch in ihre horizontalen und vertikalen Komponenten.

$$F_v = \sin(\alpha) \cdot F = \sin(45) \cdot 120\text{ N} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 100\text{ N} = 85\ \mathbf{N}$$

$$F_H = \cos(\alpha) \cdot F = \cos(45) \cdot 120\text{ N} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 100\text{ N} = 85\ \mathbf{N}$$

c) Beweise mit der ersten und der zweiten Gleichgewichtsbedingung der Statik, dass der Klotz in Ruhe bleibt (F_{2H} = 50 N, F_{3H} = 45 N). Berechne hierzu die fehlenden vertikalen Komponenten der Kräfte F_2 und F_3.

Betrag der fehlenden Kraft F_2 = 60 N (≙ 3 cm)

1. Gleichgewichtsbedingung der Statik

$\sum H = 0 = F_1 + F_{2H} - F_{3H} - F_{GH}$ = 80 N + 50 N – 45 N – 85 N = 0

Für die zweite Gleichgewichtsbedingung der Statik müssen noch die restlichen vertikalen Komponenten ermittelt werden:

$$F_{2v} = \sin(30) \cdot F_2 = \sin(30) \cdot 60\text{ N} = \frac{1}{2} \cdot 60\text{ N} = 30\ \mathbf{N}$$

$$F_{3v} = \sin(30) \cdot F_3 = \sin(30) \cdot 50\text{ N} = \frac{1}{2} \cdot 50\text{ N} = 25\ \mathbf{N}$$

$\sum V = 0 = -F_{2V} - F_G - F_{3V} + F_{GV}$ = –30 N – 30 N – 25 N + 85 N = 0

Kopfnussaufgabe 1:

Begründe, warum für den Ruhezustand des Klotzes nicht noch die 3. Gleichgewichtsbedingung der Statik überprüft werden muss.

Da sich die Wirkungslinien aller Kräfte im Schwerpunkt schneiden, handelt es sich bei dem Klotz um ein zentrales Kräftesystem. Der Körper kann also durch die angreifenden Kräfte nur verschoben, nicht aber gedreht werden. Aufgrund des fehlenden Hebelarms wirken somit auch keine Momente.

Als Hilfestellung kannst Du zunächst die Wirkungslinien der Kräfte einzeichnen.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-2: Grundlagen der Statik

Einzeichnen der Auflagerreaktionen und Überprüfung der statischen Bestimmtheit.

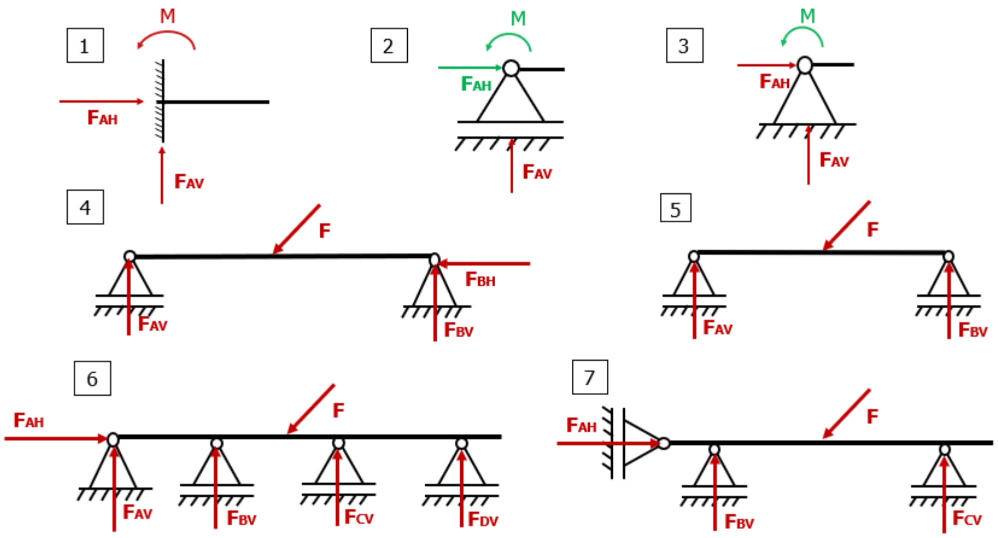


Abbildung 27: Lösung Aufgabe 7-2 a,b

Aufgabe 2:

a) Zeichne in die Lager 1-3 die Reaktionskräfte ein. Analysiere welche Kräfte das Lager 2 dann noch aufnehmen kann und welche Bewegungsmöglichkeiten der damit gelagerte Körper noch hat. Zeichne zusätzlich die Freiheitsgrade mit einem grünen Stift ein.

Das Loslager kann nur eine Kraft senkrecht zur Auflagerfläche aufnehmen. In Richtung der Auflagerfläche ist noch eine Bewegung möglich. Außerdem kann ein Drehmoment stattfinden.

b) Zeichne nun in die Träger 4-7 alle Auflagerkräfte ein. Benenne sie mit der korrekten Bezeichnung. Prüfe die Systeme anschließend auf ihre statische Bestimmtheit.

System 4: Statisch bestimmt

System 5: 1-fach unterbestimmt, da nur zwei Lagerreaktionen vorhanden sind. Da die Kraft F auch eine horizontale Komponente besitzt, würde sich der Träger verschieben. Das System wäre somit beweglich.

System 6: 2-fach statisch überbestimmt. Es sind mehr Stützen vorhanden als benötigt werden, die Auflagerreaktionen könnten wegen der vier Unbekannten nicht berechnet werden.

System 7: Statisch bestimmt, da die zwei Loslager wie ein Festlager wirken.

c) Erläutere, welche Folgen es hat, wenn ein System nicht statisch bestimmt ist.

Wenn die Anzahl der zu berechnenden Auflagerkräfte mit der Anzahl der zur Verfügung stehenden Gleichungen übereinstimmt, ist ein Tragwerk statisch bestimmt. Ist dies nicht der Fall, so können die Auflagerkräfte nicht berechnet werden. Statisch gesehen ist das System beweglich und kann nicht alle einwirkenden Kräfte aufnehmen.

Kopfnussaufgabe 2:

Begründe, weshalb man bei hitzebeanspruchten Bauteilen im Brückenbau meist ein Fest- und ein Loslager verwendet.

Durch Temperatureinwirkungen verlängern und verkürzen sich Bauteile ständig. Ein Loslager ermöglicht diese Bewegung, ohne dass zu große Spannungen im Bauteil auftreten. Das andere Lager muss fest sein, um die nötige Stabilität zu gewährleisten.

Tipp: Wodurch können Spannungen im Bauteil auftreten?

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-3: Einfach kann ja jeder …

Freischneiden von Bauteilen.

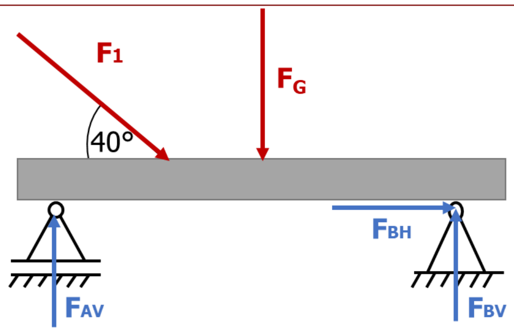


Abbildung 28: Lösung Aufgabe 7-3 a

Aufgabe 3:

a) Der Balken mit einer Masse *m* liegt auf zwei Auflagern auf. Zeichne die eingeprägten Kräfte rot und die Reaktionskräfte blau in die Abbildung ein.

b) Fertige einen Freischnitt von dem Balken an.

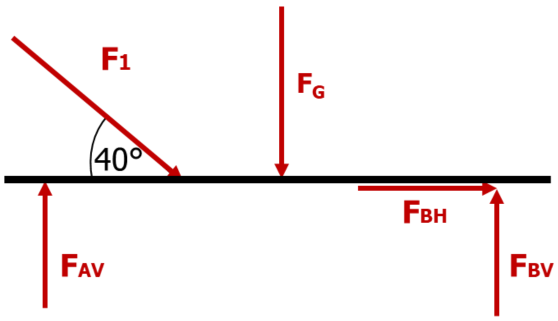
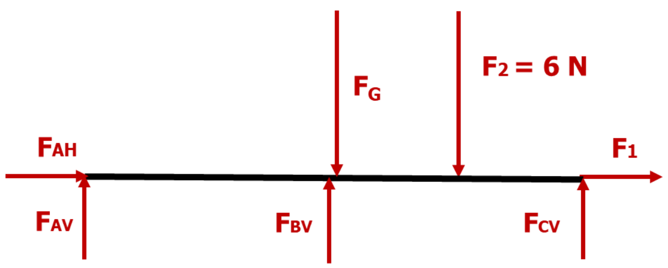


Abbildung 29: Lösung Aufgabe 7-3 b

c) Sind die Freischnitte der nachfolgend abgebildeten Systeme korrekt? Finde die insgesamt acht Fehler und verbessere sie.



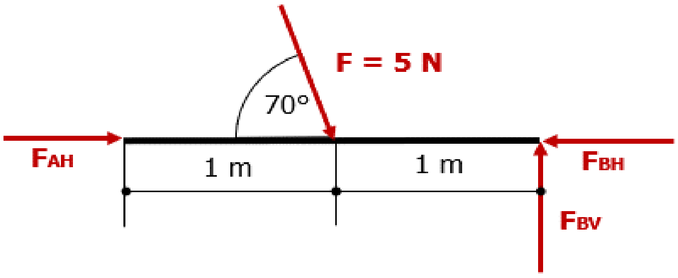


Abbildung 30: Lösung Aufgabe 7-3 c

d) Schneide den Stuttgarter Fernsehturm frei.

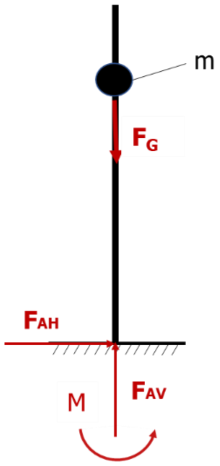


Abbildung 31: Lösung Aufgabe 7-3 d

Kopfnussaufgabe 3:

Schneide den abgestützten Stab mit der Masse *m* frei.

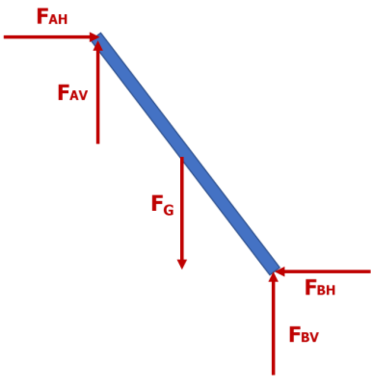


Abbildung 32: Lösung Aufgabe 7-3 Kopfnuss

TIPP

Tipp: Überlege Dir zunächst wie die freizuschneidenden Körper gelagert sind -also in welche Richtungen sie frei beweglich sind und in welche nicht.

	Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-4: Alles im Gleichgewicht?

Einfache Berechnung von Auflagerkräften.

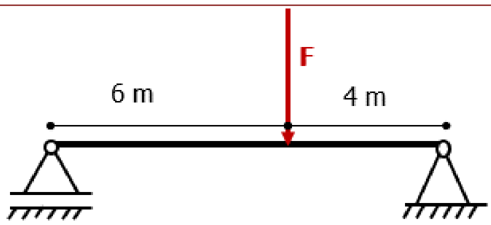


Abbildung 33: Berechnung Auflagerkräfte I

Aufgabe 4:

a) Schneide die oben skizzierte Balkenbrücke zunächst frei.

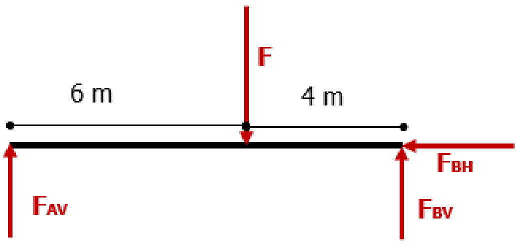


Abbildung 34: Lösung Aufgabe 7-4 a

b) Berechne nun die Auflagerreaktionen der beiden Lager. Die Kraft *F* beträgt 1 kN.

1. Gleichgewichtsbedingung der Statik

$$\sum H = \boldsymbol{F_{BH} = 0}$$

Da die Kraft F keine horizontale Komponente besitzt, muss die Auflagerkraft null sein, denn schließlich ist eine Auflagerkraft eine Reaktionskraft.

3. Gleichgewichtsbedingung der Statik

Das Moment um den Punkt A ergibt: $\sum M_A = F \cdot 6\text{ m} - F_{BV} \cdot 10\text{ m} = 0$

$$\boldsymbol{F_{BV}} = \frac{F \cdot 6\text{ m}}{10\text{ m}} = \frac{1.000\text{ N} \cdot 6\text{ m}}{10\text{ m}} = \mathbf{600\text{ N}}$$

Für die Berechnung der letzten Auflagerkraft F_{AV} gibt es nun zwei Möglichkeiten: Entweder man bildet das Moment um den Punkt B:

$$\sum M_B = -F \cdot 4\text{m} + F_{AV} \cdot 10\text{ m} = 0$$

$$\boldsymbol{F_{AV}} = \frac{F \cdot 4\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{m}} = \frac{1.000\ \mathrm{N} \cdot 4\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{m}} = \mathbf{400\ N}$$

Oder man bildet das vertikale Gleichgewicht mit Hilfe der 2. Gleichgewichtbedingung der Statik:

$$\Sigma V = F_{AV} + F_{BV} - F = 0$$

$$\boldsymbol{F_{AV}} = F_V - F_{BV} = 1000\ \mathrm{N} - 600\ \mathrm{N} = \mathbf{400\ N}$$

Kopfnussaufgabe 4:

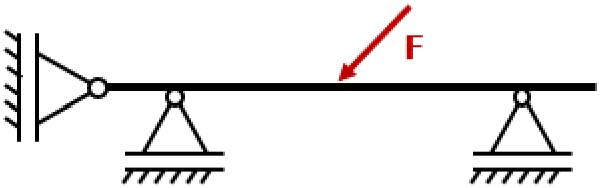


Abbildung 35: Lagerung Stab

Erkläre, wie man den oben abgebildeten Träger lagern könnte, um statisch die gleiche Wirkung zu erzielen.

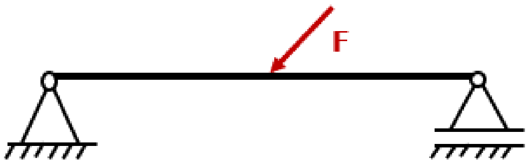


Abbildung 36: Lösung Aufgabe 7-4 Kopfnuss

Die 2 Loslager können sowohl die horizontalen als auch die vertikalen Kräfte aufnehmen. Das entspricht einem zweiwertigen Festlager.

Tipp: Überlege Dir, welche anderen Lagerungen die gleichen Bewegungen verhindern können.

	Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-5: Auflagerkräfte I

Berechnung von Auflagerkräften.

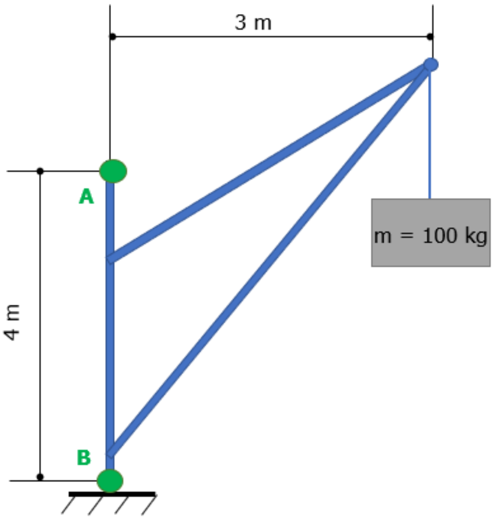


Abbildung 37: Skizze Wanddrehkran

(angelehnt an Böge, A. 1990, S. 52)

Aufgabe 5:

An einem Wanddrehkran hängt eine Last. Der Kran ist an der Wand mit 2 Lagern befestigt.

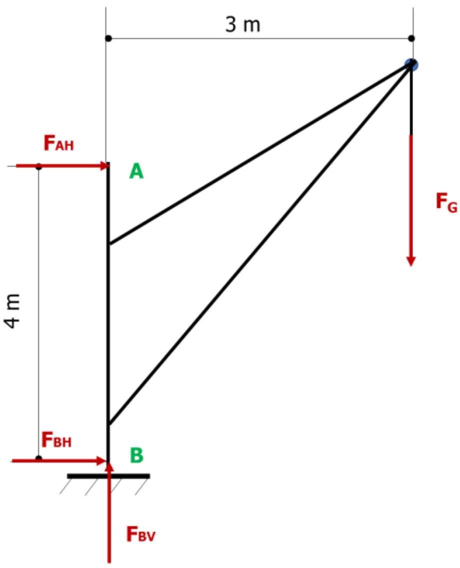


Abbildung 38: Lösung Aufgabe 7-5 a

a) Schneide den Wanddrehkran zunächst frei. Analysiere anschließend, wo sich hier jeweils das Fest- und das Loslager befindet. (s. Skizze S. 44)

b) Berechne nun die Auflagerreaktionen der beiden Lager.

Zuerst wird aus der Masse m die Gewichtskraft F_G berechnet:

$$F_G = m \cdot g = 100\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 981\ \mathrm{N}$$

Da es nur eine vertikale unbekannte Kraft gibt, erhält man durch das Aufstellen der 2. GGB direkt die Auflagerkraft F_{BV}:

$\Sigma V = F_{BV} - F_G = 0 \rightarrow F_{BV} = F_G = 981\ \mathrm{N}$

Für die Bestimmung der horizontalen Kräfte muss das Momentengleichgewicht gebildet werden. Das Moment um den Punkt A ergibt:

$\Sigma M_A = -F_{BH} \cdot 4\ \mathrm{m} + F_G \cdot 3\ \mathrm{m} = 0$

$$\boldsymbol{F_{BH}} = \frac{F_G \cdot 3\ \mathrm{m}}{4\ \mathrm{m}} = \frac{981\ \mathrm{N} \cdot 3\ \mathrm{m}}{4\ \mathrm{m}} = \mathbf{735{,}8\ N}$$

Für die Berechnung der letzten Auflagerkraft F_{AH} gibt es nun zwei Möglichkeiten: Entweder man bildet das Moment um den Punkt B:

$\Sigma M_B = F_G \cdot 3\ \mathrm{m} + F_{AH} \cdot 4\ \mathrm{m} = 0$

$$\boldsymbol{F_{AH}} = -\frac{F_G \cdot 3\ \mathrm{m}}{4\ \mathrm{m}} = -\frac{981\ \mathrm{N} \cdot 3\ \mathrm{m}}{4\ \mathrm{m}} = \mathbf{-735{,}8\ N}$$

Oder man bildet das horizontale Gleichgewicht mit Hilfe der 1. Gleichgewichtbedingung der Statik:

$\Sigma H = F_{AH} + F_{BH} = 0 \rightarrow \boldsymbol{F_{AH} = -F_{BH} = -735{,}8\ \mathrm{N}}$

Kopfnussaufgabe 5:

Begründe, inwieweit man sich das Rechnen durch logisches Betrachten der Kranskizze hätte ersparen können.

Auf diese Lösung hätte man auch durch logisches Betrachten der Skizze kommen können. Da es nur zwei horizontale und vertikale Kräfte gibt, ist es klar, dass diese gleich groß sein müssen. Sonst wäre das System nicht im Gleichgewichtszustand.

Tipp: Auch wenn es sich dieses Mal um keinen Einfeldträger handelt, ist die Vorgehensweise in der Technischen Mechanik immer gleich.

Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-6: Auflagerkräfte II

Berechnung von Auflagerkräften.

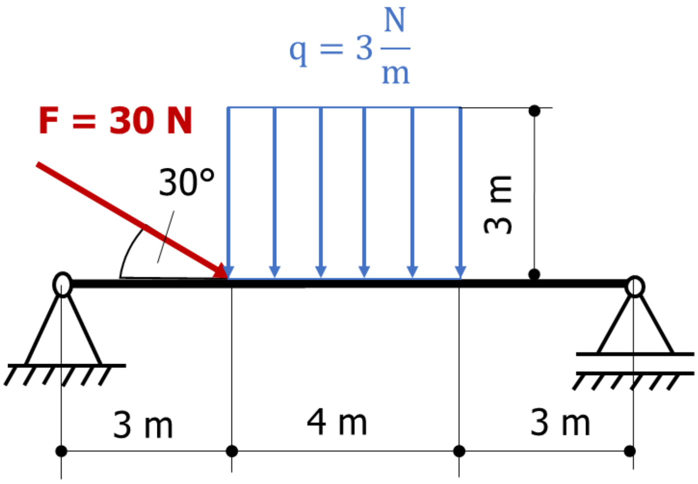


Abbildung 39: Berechnung Auflagerkräfte II

Aufgabe 6:

a) Schneide den oben abgebildeten gewichtslosen Einfeldträger zunächst frei.

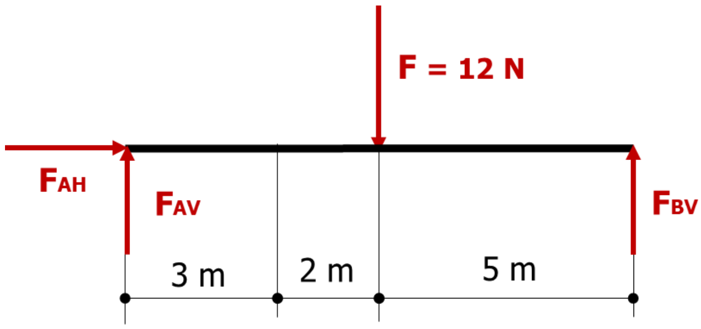


Abbildung 40: Lösung Aufgabe 7-6 a

b) Berechne nun die Auflagerreaktionen der beiden Lager.

Reduktion der Linienlast auf eine Einzellast

Betrag der Einzellast: $F = l \cdot q = 4\,\mathrm{m} \cdot 3\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 12\,\mathrm{N}$

Die Einzellast greift in der Mitte der rechteckigen Linienlast an.

Zerlegung der angreifen Kraft in ihre vertikalen und horizontalen Komponenten

$$\sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{F_V}{F} \qquad / \; (\cdot F)$$

$$\boldsymbol{F_V} = \sin(\alpha) \cdot F = \sin(30) \cdot 30\ \mathrm{N} = \frac{1}{2} \cdot 30\ \mathrm{N} = \mathbf{15\ N}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{F_H}{F} \qquad / \ (\cdot F)$$

$$\boldsymbol{F_H} = \cos(\alpha) \cdot F = \cos(30) \cdot 30\ \mathrm{N} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 30\ \mathrm{N} = \mathbf{26\ N}$$

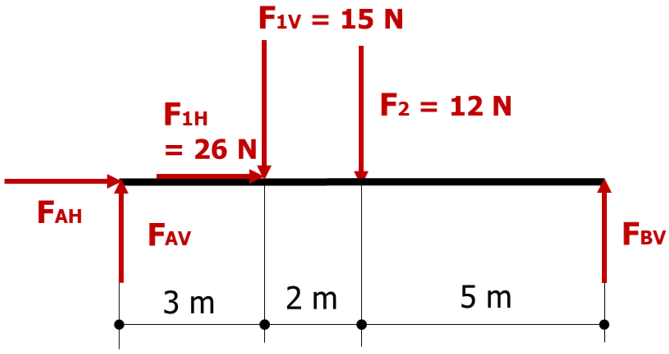


Abbildung 41: Lösung Aufgabe 7-6 b

1. Gleichgewichtsbedingung der Statik

$\Sigma H = F_{AH} + F_{1H} = 0$

$F_{AH} = - F_{1H}$

$\boldsymbol{F_{AH} = - 26\ N}$

3. Gleichgewichtsbedingung der Statik

Das Moment um den Punkt A ergibt:

$\Sigma M_A = F_{1V} \cdot 3\ \mathrm{m} + F_2 \cdot 5\ \mathrm{m} - F_{BV} \cdot 10\ \mathrm{m} = 0$

$$\boldsymbol{F_{BV}} = \frac{F_{1V} \cdot 3\ \mathrm{m} + F_2 \cdot 5\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{m}} = \frac{15\ \mathrm{N} \cdot 3\ \mathrm{m} + 12\ \mathrm{N} \cdot 5\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{m}} = \mathbf{10,5\ N}$$

Für die Berechnung der letzten Auflagerkraft F_{AV} gibt es nun zwei Möglichkeiten: Entweder man bildet das Moment um den Punkt B:

$\Sigma M_B = - F_{1V} \cdot 7\ \mathrm{m} - F_2 \cdot 5\ \mathrm{m} + F_{AV} \cdot 10\ \mathrm{m} = 0$

$$\boldsymbol{F_{AV}} = \frac{F_{1V} \cdot 7\ \mathrm{m} + F_2 \cdot 5\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{m}} = \frac{15\ \mathrm{N} \cdot 7\ \mathrm{m} + 12\ \mathrm{N} \cdot 5\ \mathrm{m}}{10\ \mathrm{m}} = \mathbf{16,5\ N}$$

Zur Kontrolle kann man jetzt noch das vertikale Gleichgewicht bilden und schauen, ob es null wird:

$\Sigma V = F_{AV} + F_{BV} – F_{1V} – F_2 = 0$

$\Sigma V = 16{,}5\ \mathrm{N} + 10{,}5\ \mathrm{N} – 15\ \mathrm{N} - 12\ \mathrm{N} = 0$

Kopfnussaufgabe 6:

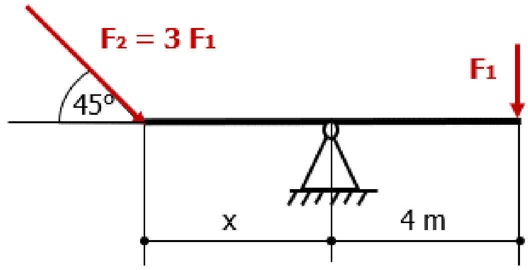


Abbildung 42: Übung Berechnung Auflagerkräfte

Berechne die Länge *x* so, dass sich der Balkon durch die Belastung nicht verdreht.

Der Balken verdreht sich nicht, wenn das Moment um das Auflager null wird.

Da nur die vertikale Komponente von F_2 ein Moment verursacht, muss diese zunächst aus der Kraft F_2 ermittelt werden:

$$sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{F_V}{F_2} \qquad / \ (\cdot F)$$

$$\boldsymbol{F_V} = \sin(\alpha) \cdot F_2 = \sin(45) \cdot F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot F_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3\ F_1$$

Nun wird das Momentengleichgewicht um das Auflager A aufgestellt:

$$\Sigma M_A = F_1 \cdot 4\,\mathrm{m} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3\ F_1 \cdot x = 0$$

$$\boldsymbol{x} = \frac{F_1 \cdot 4\,\mathrm{m}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3\ \mathrm{F}_1} = \frac{4\,\mathrm{m}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3} = \mathbf{1,9\ m}$$

Tipp: Um ein Ergebnis zu erhalten, brauchst du für die Kraft F_1 keinen konkreten Zahlenwert.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-7: Gelenkig durch die Statik

Bestimmen der statischen Bestimmtheit und Freischneiden von Gelenkträgern.

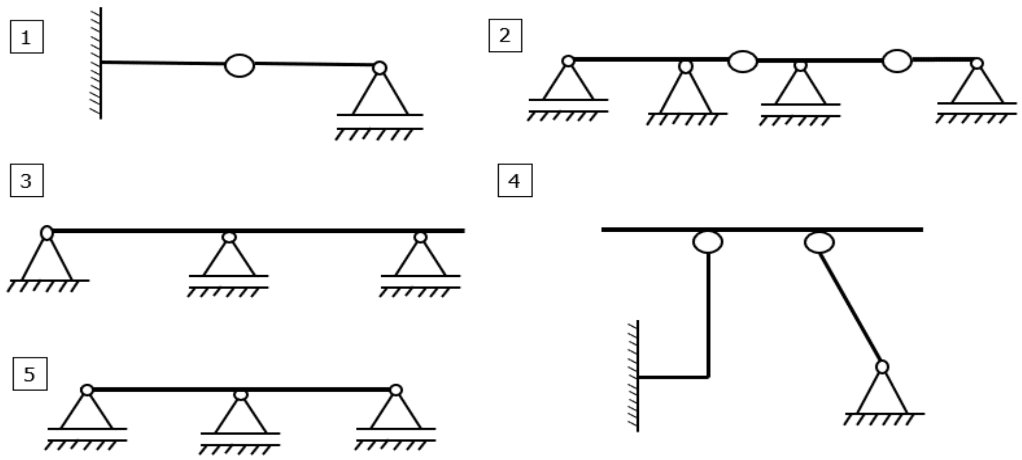


Abbildung 43: Träger

Aufgabe 7:

a) Bestimme mit Hilfe der Formel für die statische Bestimmtheit, ob die abgebildeten Körper statisch bestimmt, überbestimmt oder unterbestimmt sind.

$$f = 3k - (a + z)$$

1. k = 2, a = 4, z = 2

   $f = 3 \cdot 2 - (4 + 2) = 0$ → statisch bestimmt

2. k = 3, a = 5, z = 4

   $f = 3 \cdot 3 - (5 + 4) = 0$ → statisch bestimmt

3. k = 1, a = 4, z = 0

   $f = 3 \cdot 1 - (4 + 0) = -1$ → 1-fach statisch unbestimmt

4. k = 3, a = 5, z = 4

   $f = 3 \cdot 3 - (5 + 4) = 0$ → statisch bestimmt

5. k = 1, a = 3, z = 2

   $f = 3 \cdot 1 - (3 + 2) = -2$ → 2-fach statisch unbestimmt

b) Nenne die Aufgaben von Gelenken in der Statik.

Gelenke dienen wie Lager der Fixierung und sollen nur bestimmte Kräfte übertragen. Vor allem bei langen Trägern dienen sie dazu ein System statisch bestimmt zu überbrücken.

c) Schneide die unten abgebildeten Gelenkträger frei.

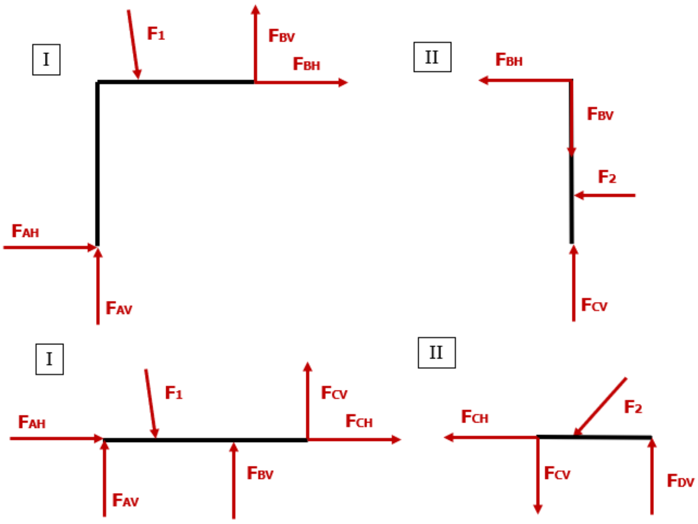


Abbildung 44: Beispiele Gelenkträger

Kopfnussaufgabe 7:

Fällt dir ein Beispiel ein, bei der die Gleichung für die statische Bestimmtheit falsch ist? Begründe.

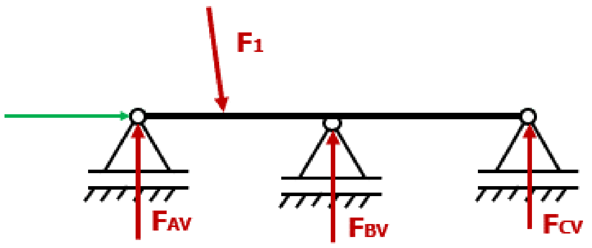


Abbildung 45: Lösung Aufgabe 7-7 Kopfnuss

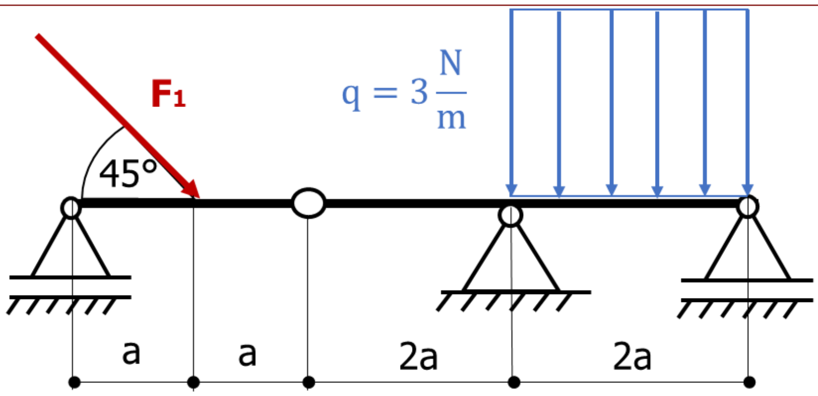
Nach der Gleichung für die statische Bestimmtheit ist der Träger zwar statisch bestimmt, bei genauerer Betrachtung ist er allerdings in die horizontale Richtung beweglich.

Schaue Dir hierzu nochmal genau die Nummer 5 in Abbildung 43 an.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-8: Gelenkreaktionen

Berechnen von Gelenkreaktionen.



a = 1 m; F_1 = 10 N

Abbildung 46: Übung Gelenkträger

Aufgabe 8:

a) Schneide den Gelenkträger frei, indem du ihn in zwei Teilsysteme zerlegst.

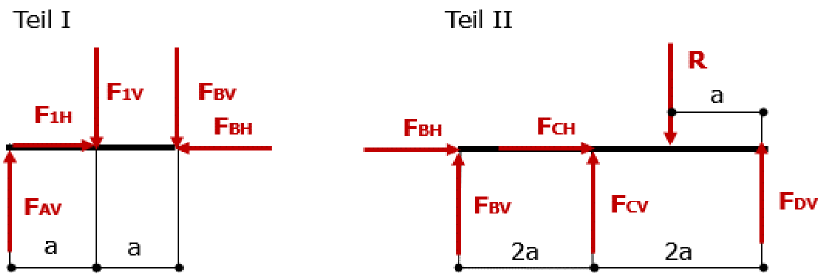


Abbildung 47: Lösung Aufgabe 7-8 a

b) Dimensioniere alle Auflager- und Gelenkkräfte des oben abgebildeten Gelenkträgers.

Kräftezerlegung: $F_{1H} = F_{1V} = \frac{1}{\sqrt{2}} F_1$

Resultierende R: $R = q \cdot l = 3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot 2\ \mathrm{m} = 6\ \mathrm{N}$

Teilsystem I:

$$\Sigma H = 0 = F_{1H} - F_{BH} = \frac{1}{\sqrt{2}} F_1 - F_{BH}$$

$$F_{BH} = \frac{1}{\sqrt{2}} F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10\ \mathrm{N} = 5\sqrt{2}\ \mathrm{N}$$

$$M_A \circlearrowleft = \ 0 = -F_{1V} \cdot a - F_{BV} \cdot 2a = -\frac{1}{\sqrt{2}} F_1 \cdot a - F_{BV} \cdot 2a$$

$$F_{BV} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} F_1 \cdot a}{2a} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10\ \mathrm{N} \cdot 1\ \mathrm{m}}{2\ \mathrm{m}} = -\frac{5\sqrt{2}}{2}\mathrm{N}$$

$$M_B \circlearrowleft = 0 = -F_{AV} \cdot 2a + F_{1V} \cdot a$$

$$F_{AV} = \frac{F_{1V} \cdot a}{2\ a} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \mathrm{F}_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}\mathrm{N}$$

Kontrolle:

$$\Sigma V = 0 = F_{AV} - F_{1V} - F_{BV} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\mathrm{N} - \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}\mathrm{N}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 10\ \mathrm{N} = 0$$

Teilsystem II:

$$\Sigma H = 0 = F_{BH} + F_{CH}$$

$$F_{CH} = -F_{BH} = -5\sqrt{2}\ \mathrm{N}$$

$$M_C \circlearrowleft = \ 0 = \ -F_{BV} \cdot 2a - R \cdot a + F_{DV} \cdot 2a$$

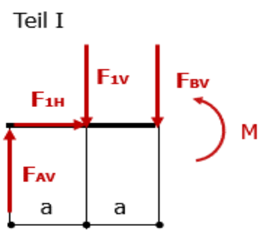
$$F_{DV} = \frac{F_{BV} \cdot 2a + R \cdot a}{2a} = \frac{-\frac{5\sqrt{2}}{2}\mathrm{N} \cdot 2 + 6\ \mathrm{N}}{2} = -0{,}54\ \mathrm{N}$$

$$\Sigma V = F_{BV} + F_{CV} + F_{DV} - R = 0$$

$$F_{CV} = R - F_{BV} - F_{DV} = 6\ \mathrm{N} - \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}\mathrm{N}\right) - 2{,}5\ \mathrm{N} = 7{,}04\ \mathrm{N}$$

Kopfnussaufgabe 8:

Anstatt des Momentengelenks wird in dem obigen Träger jetzt ein Normalkraftgelenk verbaut. Schneide erneut den linken Teil des Trägers frei und erkläre den Unterschied zwischen einem Momenten- und einem Normalkraftgelenk.



Ein Momentengelenk kann, wie der Name bereits sagt, keine Momente übertragen. Ein Normalkraftgelenk kann dagegen keine Normalkräfte übertragen.

Abbildung 48: Lösung Aufgabe 7-8 Kopfnuss

Aus dem Namen des Gelenks geht immer die Größe hervor, die nicht übertragen werden kann.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-9: Schnittgrößenverlauf I

Bestimmung des Schnittgrößenverlaufs ohne Rechnen.

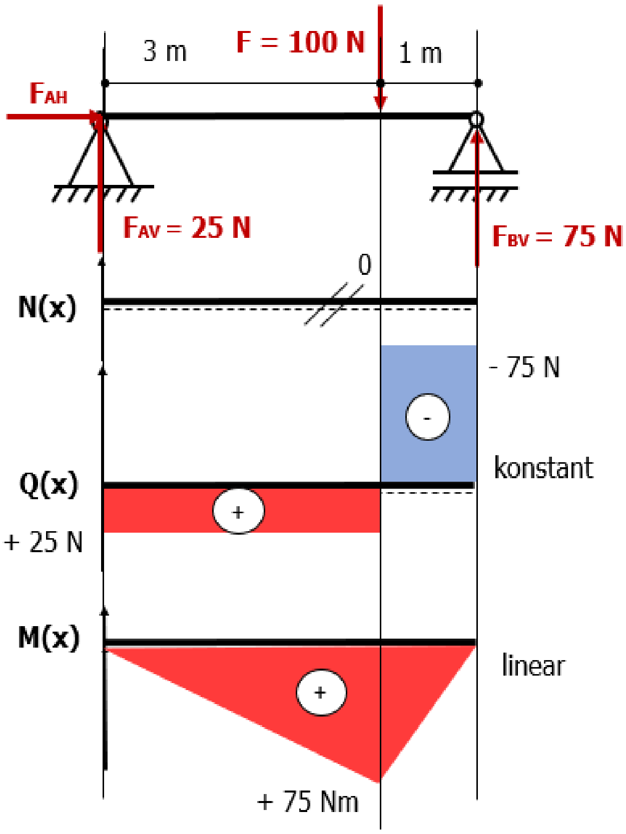


Abbildung 49: Lösung Aufgabe 7-9

Aufgabe 9:

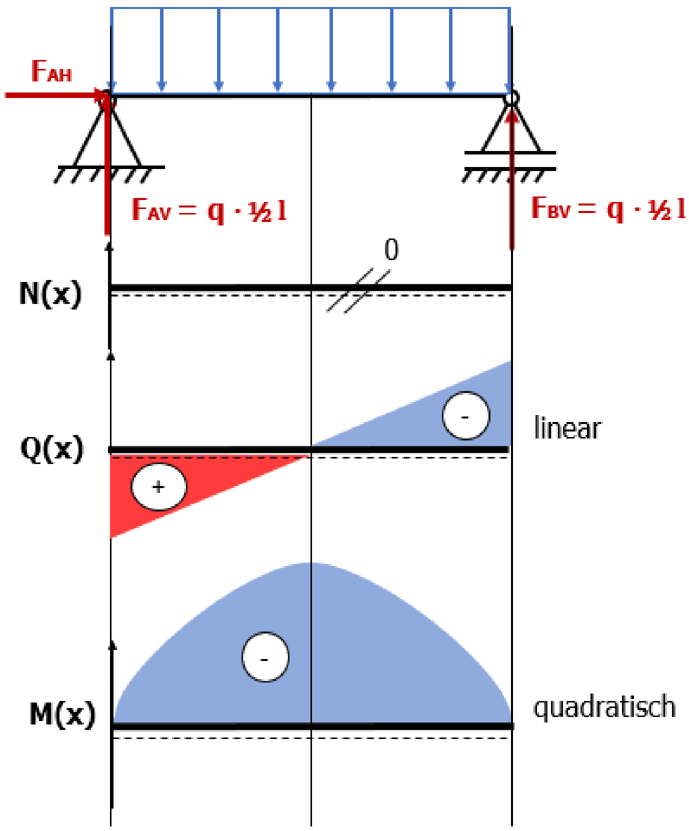
Überlege Dir zunächst, wie groß die Auflagerkräfte bei der gegebenen Belastung sein müssen. Zeichne dann die Schnittgrößenverläufe in die Abbildung ein. Gebe die Extremwerte an.

TIPP

$$\frac{dM}{dx} = Q(x)$$

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-10: Schnittgrößenverlauf II

	Bestimmung des Schnittgrößenverlaufs ohne Rechnen.
	 Abbildung 50: Lösung Aufgabe 7-10
?	**Aufgabe 10:** Überlege Dir zunächst, wie groß die Auflagerkräfte bei der gegebenen Belastung sein müssen. Zeichne dann die Schnittgrößenverläufe in die Abbildung ein. Gebe die Extremwerte an.
TIPP	$$\frac{dM}{dx} = Q(x)$$
	Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-11: Die Ingenieuraufgabe

Rechnerische Bestimmung des Schnittgrößenverlaufs durch Schneiden.

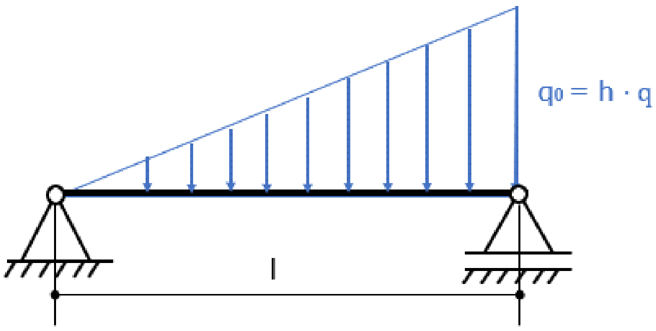


Abbildung 51: Schnittgrößenverlauf Dreiecksbelastung

Aufgabe 11:

Dreieckslasten kommen in der Natur zum Beispiel durch einen Wasserdruck in einem Becken zustande. Berechne im Folgenden die Schnittgrößenverläufe des belasteten Einfeldträgers und zeichne diese jeweils in ein Diagramm ein. Orientiere Dich dabei an dem „Kochrezept für die Statik“ (s. Kapitel 7.14) und arbeite dieses Schritt für Schritt ab. Beachte dabei unbedingt die Tipps für die jeweilige Nummer!

1. Freischneiden des Körpers

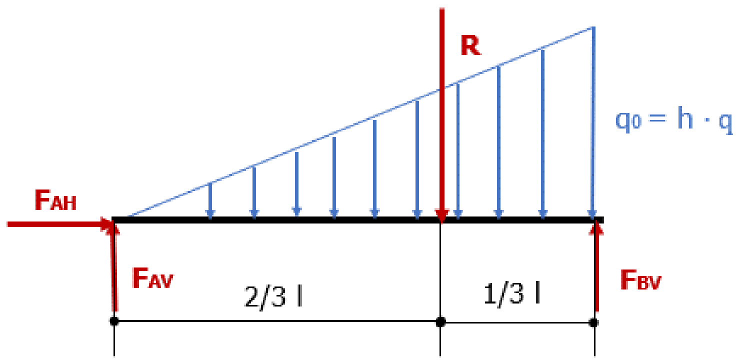


Abbildung 52: Lösung Aufgabe 7-11-1

Für den Flächeninhalt A eines Dreiecks gilt: $A = ½ \cdot l \cdot h$

Die Resultierende hat somit eine Größe von: $R = ½ \cdot l \cdot h \cdot q$

Mit $q_o = h \cdot q$ folgt: $R = \frac{q_0 \cdot l}{2}$

2. Prüfen der statischen Bestimmtheit

$$f = 3k - (a + z)$$

$$f = 3 \cdot 1 - 3 + 0 = 0$$

Das System ist also statisch bestimmt.

3. Berechnung der Auflager – und Zwischenreaktionen

$$\sum H = 0 \rightarrow A_H = 0$$

$$M_A = 2/3\, l \cdot R - B_V \cdot l = 0$$

$$M_A = \frac{2}{3} l \cdot \frac{q_0 \cdot l}{2} - B_V \cdot l = 0$$

$$B_V = \frac{q_0 \cdot l}{3}$$

$$\sum V = A_V + B_Y - R$$

$$\sum V = A_V + \frac{q_0 \cdot l}{3} - \frac{q_0 \cdot l}{2}$$

$$A_V = -\frac{2 \cdot q_0 \cdot l}{6} + \frac{3 \cdot q_0 \cdot l}{6}$$

$$A_V = \frac{q_0 \cdot l}{6}$$

4. Einteilung des Trägers in Teilabschnitte

Bei einer Streckenlast genügt es, den Träger einmal innerhalb der Streckenlast zu schneiden. Wichtig ist, dass man den Träger so betrachtet, dass die Dreieckslast nach wie vor erhalten bleibt.

Bereich: $0 \leq x \leq l$

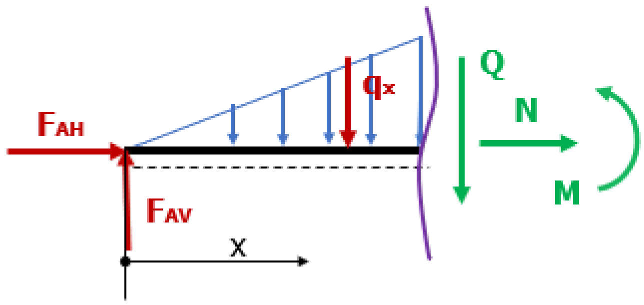


Abbildung 53: Lösung Aufgabe 7-11-2

5. Berechnung der Schnittgrößen

Für q_x gilt mit Hilfe der Strahlensätze: $\frac{q_0}{l} = \frac{q_x}{x}$

$$q_x = \frac{q_0}{l} \cdot x$$

Die Bildung der Gleichgewichtsbedingungen führt zu den Ergebnissen:

$$\sum H = 0 \qquad A_H + N = 0 \quad \rightarrow \; A_H = 0$$

$$\sum V = 0 = A_V - Q - R$$

$$Q = A_V - R$$

$$Q = A_V - \frac{q_x \cdot x}{2}$$

$$Q = A_V - \frac{(\frac{q_0}{l} \cdot x) \cdot x}{2}$$

$$Q = A_V - \frac{q_0 \cdot x^2}{2l}$$

Hieran kann man bereits erkennen, dass der Querkraftverlauf parabelförmig sein wird. Es interessieren uns für das Zeichnen aber noch die Randbedingungen:

Für $x = 0$ gilt: $Q = A_V = \frac{q_0 \cdot l}{6}$

Für $x = l$ gilt: $Q = A_V - \frac{q_0 \cdot l^2}{2l} = \frac{q_0 \cdot l}{6} - \frac{q_0 \cdot l}{2} = -\frac{2q_0 \cdot l}{6} = -\frac{q_0 \cdot l}{3}$

Bestimmung der Extremstellen:

$$Q(x) = A_V - \frac{q_0 \cdot x^2}{2l}$$

$$Q(x)' = -\frac{2q_0 \cdot x}{2l} = -\frac{q_0 \cdot x}{l}$$

$$Q(x)' = 0 = -\frac{q_0 \cdot x}{l} \rightarrow x = 0$$

Da die zweite Ableitung einen negativen Wert ergibt, handelt es sich um einen Hochpunkt.

Wir drehen jetzt um den Schnittpunkt S im Uhrzeigersinn:

$$M_S \circlearrowright = -M - \frac{q_x \cdot x}{2} \cdot \frac{1}{3} x + A_V \cdot x = 0$$

Wir setzen die Werte für q_x und A_V ein:

$$M_S = -M - \frac{q_0 \cdot x^2}{2l} \cdot \frac{1}{3} x + \frac{q_0 \cdot l}{6} \cdot x = 0$$

$$M = -\frac{q_0 \cdot x^3}{6l} + \frac{q_0 \cdot l}{6} \cdot x$$

Man erkennt bereits an der Funktion 3. Grades, dass diese kubisch ist.

Für $x = 0$ gilt: $M(0) = 0$

Für $x = l$ gilt: $M(l) = -\frac{q_0 \cdot l^3}{6l} + \frac{q_0 \cdot l}{6} \cdot l = 0$

Untersuchung auf Extremstellen:

$$M(x) = -\frac{q_0 \cdot x^3}{6l} + \frac{q_0 \cdot l}{6} \cdot x$$

$$M(x)' = -\frac{3q_0 \cdot x^2}{6l} + \frac{q_0 \cdot l}{6} = -\frac{q_0 \cdot x^2}{2l} + \frac{q_0 \cdot l}{6}$$

$$M(x)' = 0 = -\frac{q_0 \cdot x^2}{2l} + \frac{q_0 \cdot l}{6}$$

$$\frac{q_0 \cdot x^2}{2l} = \frac{q_0 \cdot l}{6} \quad /: q_0 \; /\cdot 2l$$

$$x^2 = \frac{2}{6} \cdot l^2 = \frac{1}{3} \cdot l^2 \quad /\sqrt{}$$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot l$$

Das negative Ergebnis muss nicht weiter überprüft werden.

Handelt es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt?

$$M(x)'' = -\frac{q_0 \cdot 2x}{2l} = -\frac{q_0 \cdot x}{l}$$

$$M\left(\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot l\right)'' = -\frac{q_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot l}{l} < 0 \;\rightarrow \mathrm{HP}$$

Nun benötigen wir noch den 2. Koordinatenwert an der dieser Stelle:

$$M\left(\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot l\right) = -\frac{q_0 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot l\right)^3}{6l} + \frac{q_0 \cdot l}{6} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot l$$

$$M\left(\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot l\right) = -\frac{q_0 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot l^3}{6l} + \frac{q_0 \cdot l}{6} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot l$$

$$M\left(\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot l\right) = -\frac{q_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot l^2}{18} + \frac{q_0 \cdot l^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}}{6}$$

$$M\left(\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot l\right) = \frac{1}{9} \cdot q_0 \cdot l^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}$$

6. Skizzieren der Schnittgrößen mit Angaben der Extremwerte

Wichtig ist hierbei nicht, dass die Funktionen ganz genau gezeichnet werden, sondern das wichtige Stellen mit Werten versehen werden.

Zudem ist zu vermerken, ob ein Verlauf an einer Stelle linear, kubisch oder quadratisch ist.

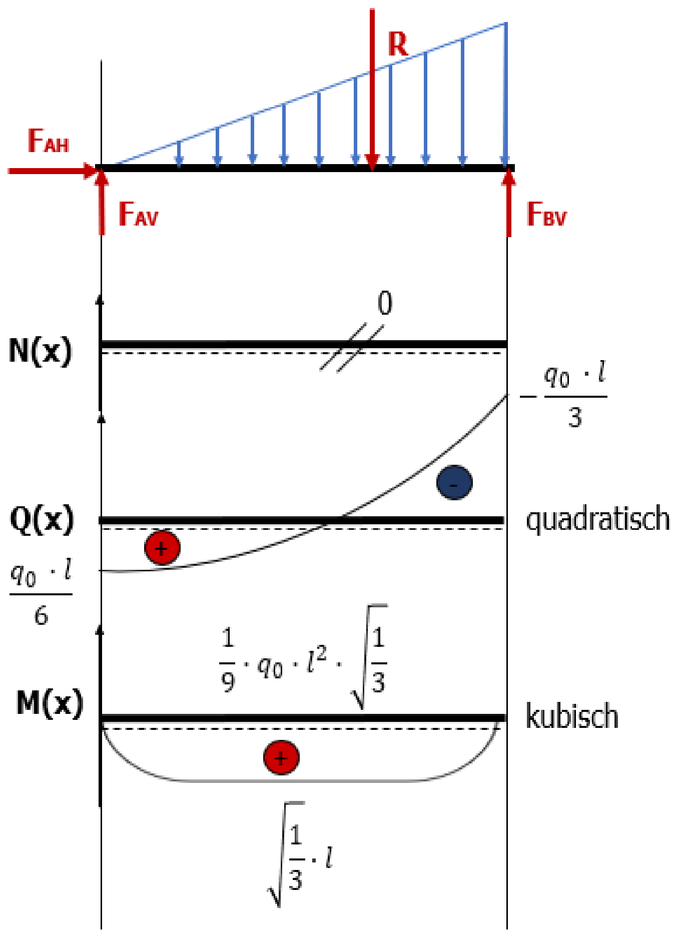


Abbildung 54: Lösung Aufgabe 7-11-3

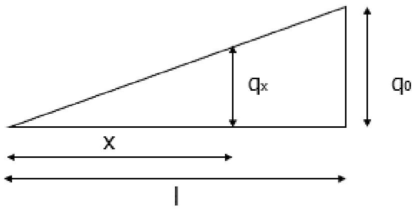
Tipps zum Kochrezept zur Statik bei einer Dreiecklast:

Zu 1.) Die Resultierende greift bei einer Dreiecklast bei dem Verhältnis 2/3 zu 1/3 des Balkens an.

Zu 3.) In diesem Beispiel werden bewusst keine konkreten Zahlenwerte angegeben. Berechne die Auflagerkräfte daher in Abhängigkeit von *l* und *q*.

Zu 4.) Es genügt, den Träger einmal innerhalb der Streckenlast zu schneiden. Achte hierbei darauf, dass Du in diesem Fall das positive Schnittufer betrachtest, so dass die Dreiecksform der Last erhalten bleibt.

Zu 5.) Beachte die Strahlensätze, wenn Du erneut die Resultierende bildest:



$$\frac{q_0}{l} = \frac{q_x}{x}$$

Abbildung 55: Strahlensätze

Hieraus erhältst Du die Gleichung für q_x, die Du wiederrum in die Gleichung für die Resultierende einsetzen musst.

Denke auch daran, die Extremwerte der Funktionen Q(x) und M(x) zu bestimmen.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Exkurs: Konstruktion eines Fachwerkcarports

Konstruktion eines Fachwerkcarports, Rechnen mit dem oktametrischen Maßsystem, Anfertigen einer technischen Zeichnung mit einem CAD-Programm, Analyse des Kräfteverlaufs und Fachwerkberechnung mittels des Knotenpunktverfahrens.

Konstruktionsaufgabe

Konstruiert als Gruppe für die Unterstellung eines Autos ein Modell für ein Fachwerkcarport. Berücksichtigt dabei die folgenden Bedingungen:

- Die Maße sollen genau den genannten Größen entsprechen: Länge: 6 m, Breite: 5,30 m, Lichte Raumhöhe ohne Dachkonstruktion: 3 m.
- Der Carport soll drei, nach dem oktametrischen Maßsystem berechnete, Fensteröffnungen sowie eine Türe enthalten.
- An der kürzeren Seite des Carports befindet sich die Ein- und Ausfahrt für einen durchschnittlichen Kombi. Dimensioniert die Öffnung nach den typischen Größen für ein Garagentor (siehe Internet).
- Der Carport wird mit einem Flachdach aus Holz abgeschlossen. Dieses soll 20 cm an jeder Seite des Carports abstehen.

Materialien

- Holzleisten mit einem quadratischen Querschnitt (5 mm * 5 mm oder 8 mm * 8 mm)
- Holzleisten mit einem rechteckigen Querschnitt (5 mm * 10 mm oder 8 mm * 15 mm)
- Eine Unterlage (z.B. MDF-Platte) 300 mm * 400 mm oder je nach gewähltem Maßstab auch größer
- Säge mit Winkeleinstellungsmöglichkeit (am besten Kreissäge)
- Holzfeile
- Geodreieck oder rechter Winkel, Bleistift
- Sekundenkleber (oder Modellbaukleber) für Holzmaterialien

Arbeitsauftrag

- Überlegt Euch einen sinnvollen Maßstab für das Modellhäuschen.
- Plant Euer Carport unter Berücksichtigung der statischen Gesichtspunkte genau und fertigt eine technische Zeichnung dazu an (evtl. auch mit einem CAD-Programm).
- Die Fachwerkwände werden durch Windlasten von rechts und links angegriffen. Fertigt eine Skizze an, die verdeutlicht wie die Lasten durch eine Fachwerkwand Eurer Wahl Eures Carports in den Untergrund abgeleitet werden. Erläutert Eure Gedankengänge kurz. (Zusatz: Simuliert diese Situation anschließend mit einer FEM-Analyse und wertet diese aus).
- Baut nun ein Modell der Fachwerkwand in Eurem ausgewählten Maßstab. Achtet darauf, dass zum Schluss alle Teile zu dem Carport zusammengesetzt werden müssen.
- Der Carport wird im Winter mit einer Schneelast von 180 kg/m² belastet. Berechnet die Kraft, die auf 4 beliebige Stäbe Eurer Fachwerkwand wirkt.

Kopfnussaufgabe 1:

Zusätzlich könnt Ihr noch Schmuckelemente in Eure Fachwerkkonstruktion einbringen.

Tipp: Berücksichtigt bei der Konstruktion die Hinweise des Skripts.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 8-1: Finite-Elemente-Methode (FEM-Analyse)

Spannungen in Werkstücken mit Hilfe eines CAD-Programms unter Last untersuchen.

Abbildung 56: T-Träger in der Baustatik

Aufgabe 1:

Träger werden in der Baustatik verwendet um Lasten, die beispielsweise durch das Gewicht der Decke zustande kommen, abzuleiten. In jedem Gebäude werden dabei Stützen und Träger mit einem sogenannten Doppel-T-Profil eingebaut. Der Name kommt daher, dass der Träger T-förmig ist. T-Träger weisen eine hohe Biegesteifigkeit trotz geringem Materialeinsatz auf und sind nicht knickgefährdet. Trotzdem haben sie einige Schwachstellen, die, um einen Einsturz des Gebäudes zu verhindern, ausreichend dimensioniert werden müssen …

a) Konstruiere mit einem CAD-Programm einen Doppel-T-Träger mit dem Profil IPE 500. Die Maße kannst Du in der anhängenden Kennwerttabelle der IPE-Profile nachsehen. Die Bohrungen können vernachlässigt werden. Führe anschließend eine FEM-Analyse unter den in Abbildung Bedingungen durch:

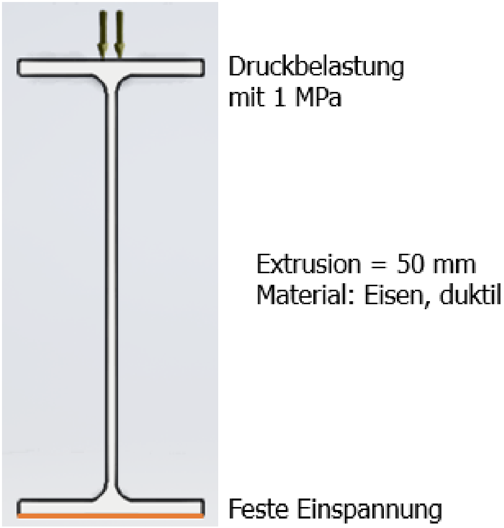


Abbildung 57: Doppel-T-Träger Analyse

b) Analysiere die Schwachstellen des T-Trägers.

Die Schwachstellen des T-Trägers liegen mit einer Maximalspannung von 78,28 MPa in den 2 Kerben auf der Seite der Belastung. Hier ist die Kerbspannung sehr hoch, was schnell zu einem Versagen führen kann. Der Flansch biegt sich hier um ganze 0,2 mm nach unten.

c) Ermittle, mit welcher resultierenden Kraft der Träger belastet wird.

Druckbelastung = 1 MPa = 1 N/mm²

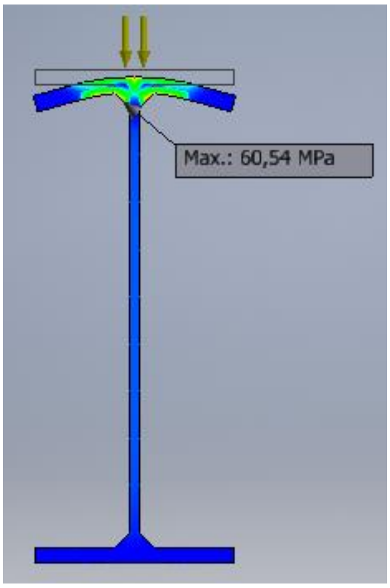
$A = b \cdot t = 200 \text{ mm} \cdot 50 \text{ mm} = 10.000 \text{ mm}$

$R = q \cdot A = 10.000 \text{ mm} \cdot 1 \text{ N/mm}^2 = 10 \text{ kN}$

d) Wie könnten die Schwachstellen vermieden werden? Versuche den T-Träger durch geschickte Materialanlagerung zu optimieren und führe erneut eine FEM-Analyse durch. Dokumentiere Deine Ergebnisse.

Hier gibt es verschiedene Lösungsansätze: der Radius des Viertelkreises kann verändert werden, es wird eine Phase anstelle des Vierteilkreises in die Kerbe gelegt, usw.. Hier zwei Beispiele:

1.) Phase mit 15 mm: 60,54 MPa 2.) 90°-Kerbe: 86,87 MPa



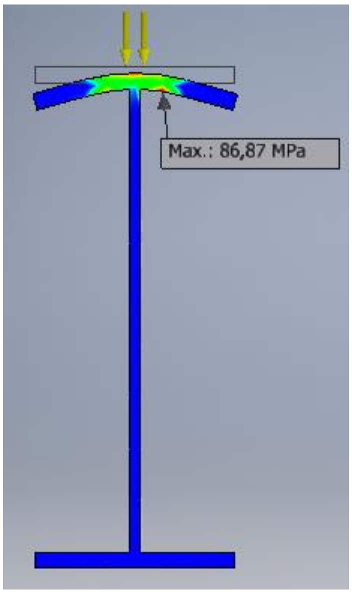


Abbildung 58: Lösung Aufgabe 8-3 d

e) Nach jahrelanger Forschungsarbeit haben Ingenieure die Zugdreiecksmethode zur Optimierung von Kerben entwickelt. Konstruiere jeweils drei Zugdreiecke und füge sie in die Kerben ein. Nenne die Vorteile dieser Materialanlagerung.

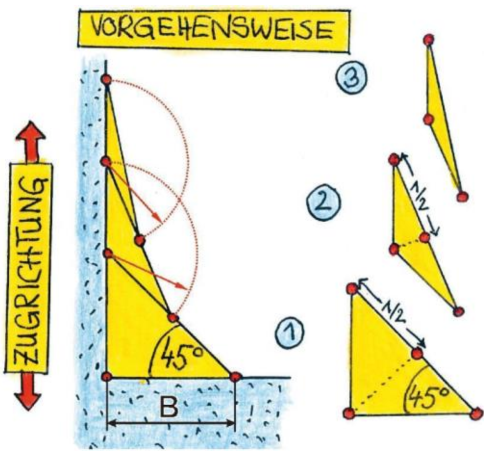
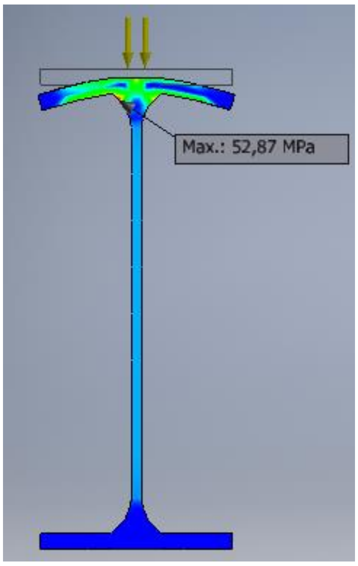


Abbildung 59: Zugdreiecksmethode (Bild: KIT)

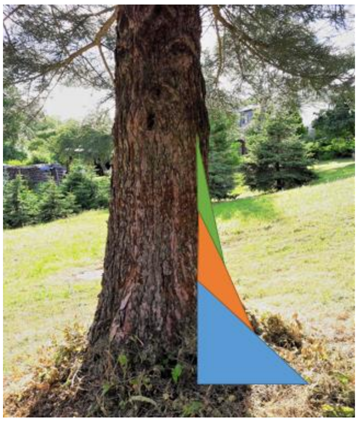


Die mit Zugdreiecken optimierte Form weist im Gegensatz zur Ingenieurkerbe mit einem einfachen Viertelkreis keine Spannungsspitzen mehr auf. Die Kräfte werden hier in das Bauteil abgeleitet. Die Kerbspannung sowie der Materialverbrauch können somit auf ein Minimum reduziert werden.

Abbildung 60: Lösung Aufgabe 8-3 e

Kopfnussaufgabe 1:

Die Zugdreiecksmethode wurde anhand von Vorbildern aus der Natur entwickelt, also bionisch. Nenne Strukturen in der Natur, die nach dem Zugdreiecksprinzip aufgebaut sind.



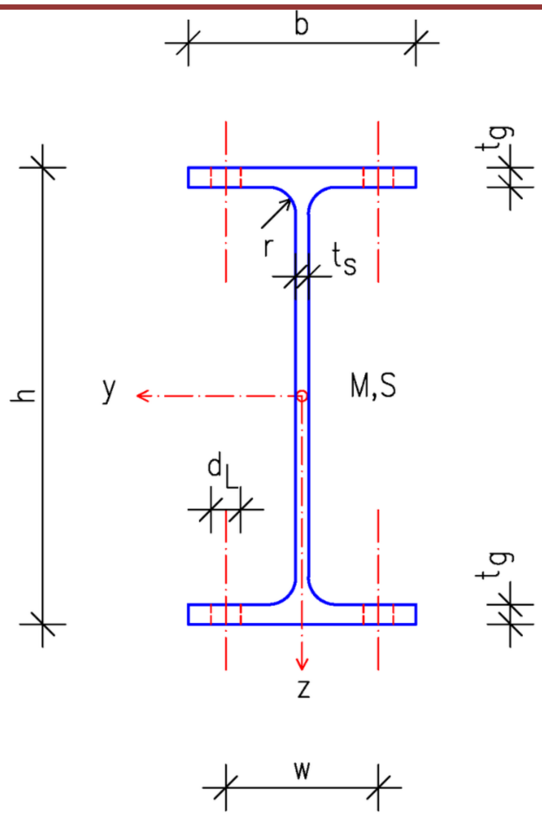
Dieses Prinzip der Materialanlagerung findet man in der Natur auch an Dornen, in Astgabeln oder Blättern wieder. Besonders Bäume haben sich hierbei über Jahrmillionen weiterentwickelt: an ihrem Stammbaum liegen Materialanlagerungen in Form von Zugdreiecken. Hierbei wächst nur zusätzliches Holz an den Stellen, die auch mit einer Spannung belastet werden.

Abbildung 61: Lösung Aufgabe 8-3 Kopfnuss

Bäume haben über Jahrmillionen sehr stabile Strukturen entwickelt …

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Kennwerttabelle (Auszug)



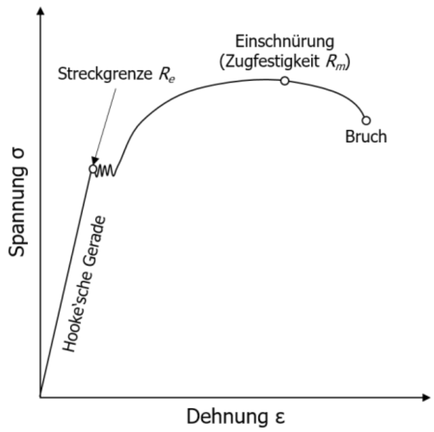
IPE Profil	Abmessungen									Löcher	
	h mm	**b** mm	**t_s** mm	**t_g** mm	**r** mm	**A_{Steg}** cm²	**A** cm²	**Masse** kg/m	**U** m²/m	**d_L** mm	**w** mm
330	330	160	7,5	11,5	18	23,89	62,61	49,15	1,254	21	95
360	360	170	8,0	12,7	18	27,78	72,3	57,09	1,353	25	107
400	400	180	8,6	13,5	21	33,24	84,46	66,3	1,467	25	114
450	450	190	9,4	14,6	21	40,93	98,82	77,57	1,605	28	121
500	500	200	10,2	16,0	21	49,37	115,5	90,68	1,744	28	122
550	550	210	11,1	17,2	24	59,14	134,4	105,5	1,877	28	129

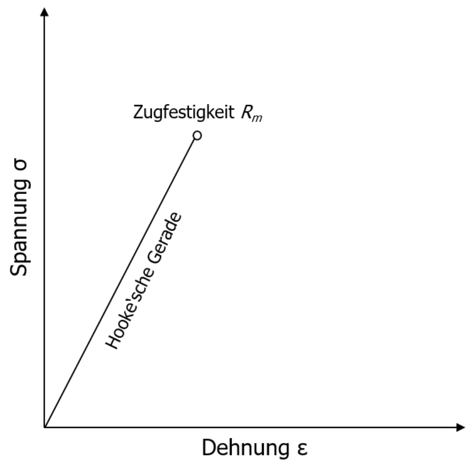
Blatt 8-2: Spannungs-Dehnungs-Diagramme

Arbeiten mit Spannungs-Dehnungs-Diagrammen und Bedeutung der Kennwerte.

Aufgabe 2:

a) Skizziere jeweils ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm für einen duktilen und einen spröden Werkstoff, beschrifte alle relevanten Bereiche und zeichne alle wichtigen Werkstoffkennwerte ein.





b) Erkläre den Unterschiedlichen Verlauf für duktile und spröde Materialien

Duktile Werkstoffe (bspw. Baustähle) sind Materialien, bei denen Monolagen im Kristall in Zugrichtung abgleiten können. Dadurch fließt der Werkstoff bei hoher Zugbelastung und verengt sich (Einschnürung) an der Stelle der maximalen Spannung, bevor er bricht.

Spröde Werkstoffe (bspw. Gusseisen, keramische Werkstoffe) sind Materialien, in denen aufgrund ihrer Werkstoffbeschaffenheit kein Abgleiten der Monolagen im Kristall möglich ist. Die Probe trennt sich ohne eine Strukturänderung innerhalb der Monolagen und ohne Einschnürung in einem geraden Bruch.

Kopfnussaufgabe 2:

Gegen Ende des Verlaufs flacht das Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines duktilen Werkstoffs merklich ab, obwohl bei steigender Belastung die Spannung im Bauteil größer werden müsste. Erläutere, welche messtechnische Annahme diesen Verlauf verursacht.

Im Bereich der Einschnürung konzentriert sich fortan die gesamte Kraft, sodass sich der tragende Querschnitt weiter verringert und damit die ertragbare Kraft der Probe. Über den Zusammenhang der Spannung mit Kraft und Querschnittsfläche (s. Kapitel „Zuge-banspruchung“) verringert sich somit ebenfalls die (gemessene) Spannung in der Probe über den Bereich der Einschnürdehnung, was sich durch das Absinken der Kurve unter den Hochpunkt bemerkbar macht. Dieser Kurvenverlauf wird rein von den Messbedingungen verursacht, da sich die Berechnung der Spannung über die gesamte Messung am Anfangsquerschnitt A0 der Probe orientiert. Die wahre Spannung im Einschnürquerschnitt nimmt natürlich solang zu, bis der Restquerschnitt der Beanspruchung nicht mehr standhalten kann und die Probe bricht.

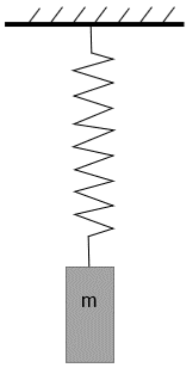
TIPP

Die Spannung wird auf der y-Achse und die Dehnung auf der x-Achse aufgetragen.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 8-3: Das Hookesche Gesetz

Einen Versuch zum Verständnis des Hookeschen Gesetzes durchführen.



Materialien

- 2 Spiralfedern mit unterschiedlicher Härte (zulässige Höchstbelastung der Federn: weiche Feder: 450 g, harte Feder 1000 g)
- Stativmaterial
- Massestücke (50 g und 400 g)
- Lineal

Abbildung 62: Belastete Feder

Aufgabe 3:

a) Belaste die weiche Feder in 50 g Schritten mit Gewichten bis Du ein Gesamtgewicht von 250 g erreicht hast. Führe dasselbe mit der harten Feder in 100 g Schritten bis zu einem Gewicht von 1000 g durch. Als Referenz wird der unbelastete Zustand verwendet. Trage Deine Messwerte in die untere Tabelle ein.

Harte Feder		Weiche Feder	
Masse [kg]	Federlänge [cm]	Masse [kg]	Federlänge [cm]
0	20,5	0	25,5
100	21,4	50	27,4
200	22,4	100	29,4
300	23,2	150	31,5
400	24,1	200	33,5
500	25,3	250	35,4

b) Führe folgende Berechnung nur für die weiche Feder durch: Teile die Masse *m* durch die Auslenkung *s* (die Auslenkung ist die Federlänge im belasteten Zustand abzüglich der Federlänge im unbelasteten Zustand). Was stellst Du fest?

Weiche Feder			
Masse m [kg]	Federlänge [cm]	Auslenkung s [cm]	m/s
0	25,5	0	-
50	27,4	1,9	26,3
100	29,4	3,9	25,6
150	31,5	6	25
200	33,5	8	25
250	35,4	9,9	25,3

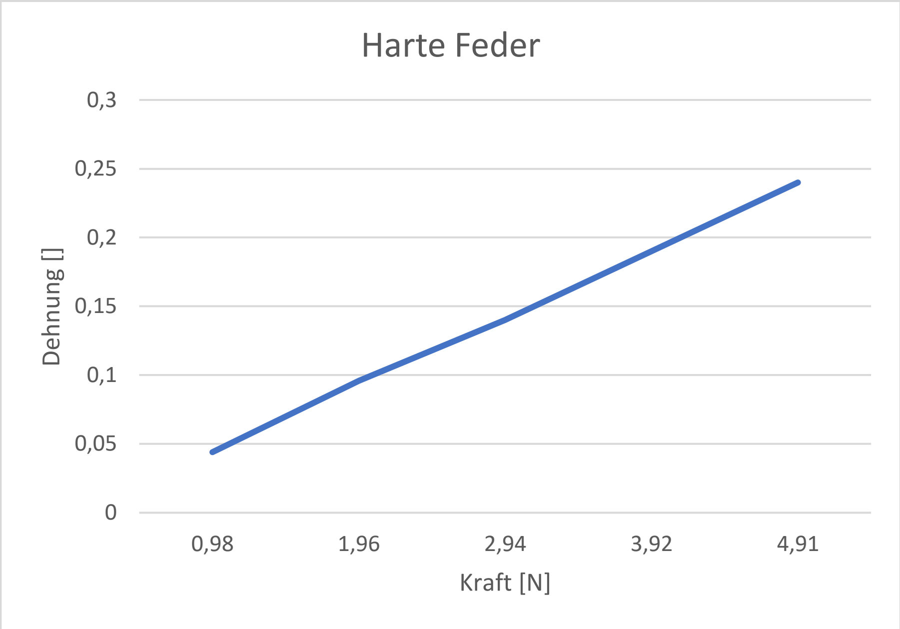
Die Auslenkung der Feder ist zu der angehängten Masse proportional.

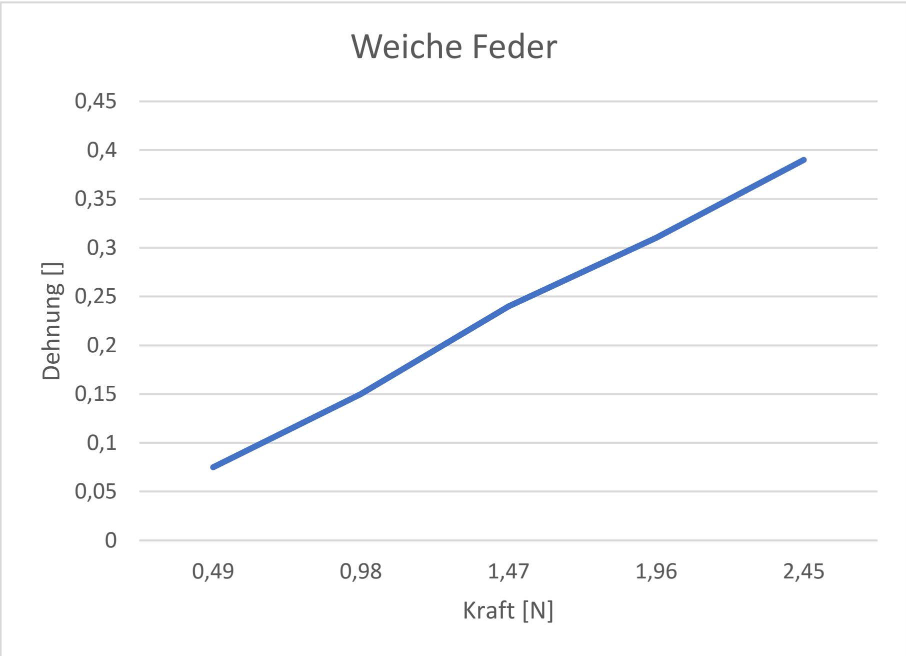
c) Berechne aus der Masse die Gewichtskraft *G.* Ermittle auch die Dehnung der Federn. Trage Deine Ergebnisse wieder in die Tabelle ein.

Allgemein: $G = m \cdot g$, $\varepsilon = \frac{s}{l_0}$

Weiche Feder		Harte Feder	
Kraft [N]	Dehnung []	Kraft [N]	Dehnung []
0,49	0,075	0,98	0,044
0,98	0,15	1,96	0,096
1,47	0,24	2,94	0,14
1,96	0,31	3,92	0,19
2,45	0,39	4,91	0,24

d) Erstelle aus den Angaben nun für jede Feder ein Kraft-Dehnungsdiagramm. Stelle eine Vermutung auf, was für eine Form die Kurve annehmen wird.





Kopfnussaufgabe 3:

Begründe, warum die Federn nicht über ihre zulässige Höchstbelastung hinaus belastet werden dürfen.

Würde die Feder über die zulässige Höchstbelastung hinaus belastet werden, würde eine plastische Verformung eintreten, die nicht mehr vollständig rückgängig gemacht werden kann. Bleibende Verformungen wären die Folge.

Bei der Lösung der Aufgabe hilft dir der plastische Dehnungsbegriff.

Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 8-4: Zug- und Druckbeanspruchung

Berechnen der Spannung und Dehnung in verschiedenen Stützenquerschnitten.

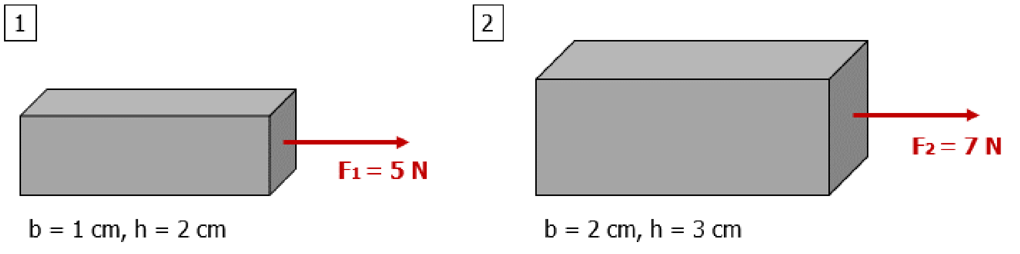


Abbildung 63: Spannungsberechnung Rechteck

Aufgabe 4:

a) Auf die zwei Stützen mit unterschiedlicher Querschnittsfläche wirken die beiden Zugkräfte F_1 und F_2 im Schwerpunkt. Berechne, welche Stütze stärker beansprucht wird.

Stütze 1:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_1}{b_1 \cdot h_1} = \frac{5\ \mathrm{N}}{10\ \mathrm{mm} \cdot 20\ \mathrm{mm}} = 0{,}025\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

Stütze 2:

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{F_2}{b_2 \cdot h_2} = \frac{7\ \mathrm{N}}{20\ \mathrm{mm} \cdot 30\ \mathrm{mm}} = 0{,}012\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

Stütze 1 wird also fast doppelt so stark belastet wie Stütze 2.

b) Anstatt des rechteckigen Profils verwendet man jetzt eine kreisförmige Stütze mit einem Durchmesser von d = 6 mm. Diese wird wieder mit einer Kraft von F = 5 N belastet.

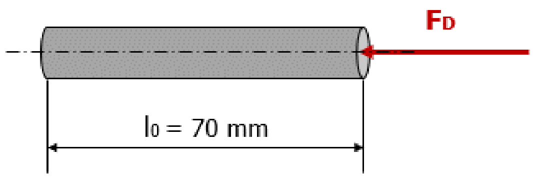


Abbildung 64: Spannungsberechnung Stab

Berechne die Druckspannung und ermittle, um wie viel der Stab nach innen gedrückt wird, wenn die Dehnung ε = 0,02 beträgt.

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi \cdot r^2} = \frac{5\ \mathrm{N}}{\pi \cdot (3\ \mathrm{mm})^2} = 0{,}18\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \rightarrow \Delta l = \varepsilon \cdot l_0 = 0{,}2 \cdot 70\ \mathrm{mm} = 1{,}4\ \mathrm{mm}$$

c) Eine Stütze mit einer Länge von 200 mm verlängert sich bei einer Zugbelastung um 1 cm. Wie groß ist die Dehnung? Die Stütze besteht aus Grauguss (E-Modul = 100.000 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$). Berechne zudem die Spannung in der Stütze.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1\ \mathrm{cm}}{20\ \mathrm{cm}} = 0{,}05$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = 100.000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \cdot 0{,}05 = 5000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

d) Berechne die Dehnung für den unten abgebildeten Stahlstab mit den folgenden Belastungen:

F = 2000 kN

E = 210.000 $\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{mm^2}}$

d_0 = 70 mm

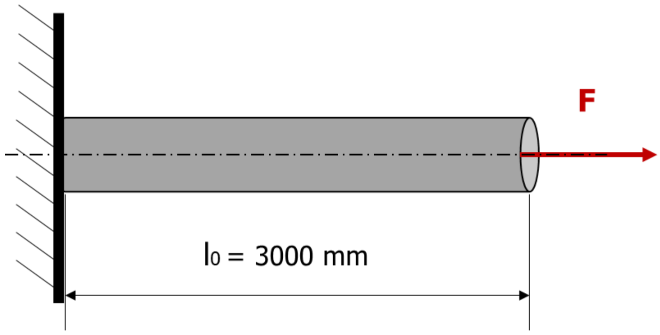


Abbildung 65: Dehnungsbestimmung Stahlstab

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi \cdot r^2} = \frac{2000.000\ \mathrm{N}}{\pi \cdot (35\ \mathrm{mm})^2} = 519{,}7\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$\sigma = \varepsilon \cdot E \;\rightarrow\; \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{519{,}7\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}}{210.000\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$$

TIPP

Für die Lösung der Aufgabe brauchst du die beiden Formeln

$\boldsymbol{\sigma = \frac{F}{A}}$ **und** $\boldsymbol{\sigma = \varepsilon \cdot E}$**.**

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 8-5: Bitte nicht geknickt sein ...

Beschreiben und Nutzen der Euler´schen Knickfälle.

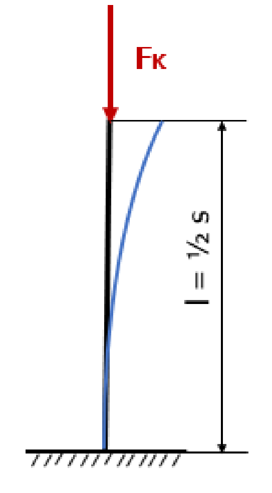
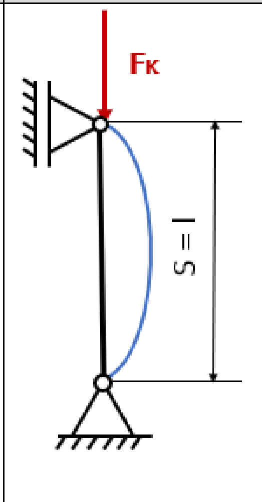
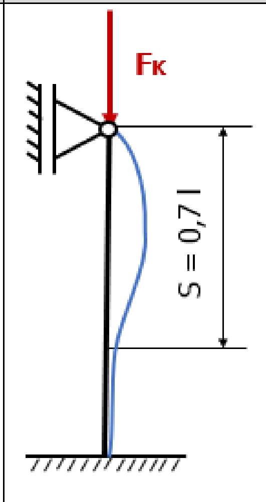
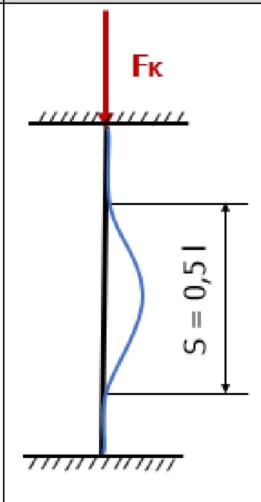
Knickfall 1	Knickfall 2	Knickfall 3	Knickfall 4
			
s_k = 2l	s_k = l	s_k = 0,7l	s_k = 0,5l
$F_K = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$	$F_K = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$	$F_K = 2\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$	$F_K = 4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$

Abbildung 66: Euler´sche Knickfälle

Aufgabe 5:

a) Nenne die Faktoren, von denen die Knickkraft abhängig ist.

Stabgeometrie (Länge)

Querschnittsform

Einspannung

Werkstoff (Elastizitätsmodul)

b) Vervollständige die Sätze…

Je länger ein Stab, desto geringer ist die Knicklast.

Je höher der E-Modul, desto höher ist die Steifigkeit des Werkstoffs gegen Verformung (Knicken).

c) Fülle die Lücken aus.

Wird ein Bauteil auf Zug beansprucht, so kann es seine Funktion sicher erfüllen, solange die ______Zugspannung__________unter der Dehngrenze des Werkstoffs bleibt.

Bei einem unter Druck beanspruchten Stab, kann sowohl _____Druck_____spannung, als auch _______Knick___spannung entstehen. Die Gefahr dabei ist, dass ein Bauteil bereits vor Erreichen der Werkstoffgrenze/ Stauchgrenze seitlich ______Ausknicken_______ kann.

Vor allem _______schlanke______ Stützen neigen dazu zu Knicken. Damit die Sicherheit trotzdem gewährleistet ist, muss die ___Knickspannung______ immer unter der vorhandenen Spannung bleiben.

Die Festigkeit eines knickgefährdeten Stabes kann vor allem durch die Einspannung/Lagerung_____ beeinflusst werden.

Hierzu hat __Euler___ vier Gleichungen entwickelt, mit denen man die _______Knicklast______ in Abhängigkeit der _______Knicklänge_____ ermitteln kann.

d) Beschreibe die vier Euler´schen Knickfälle in eigenen Worten. Die Abbildung 66 zu den Knickfällen soll Dir dabei helfen. Gehe vor allem auf die Lagerungsverhältnisse und die Knicklänge ein.

Fall 1: Der Eulerfall 1 beschreibt einen Stab, der an einem Ende fest eingespannt ist. Das andere Ende ist frei. Die Knicklänge ist hierbei doppelt so groß wie die Stützenlänge.

Fall 2: Der Eulerfall 2 entspricht einem Stab, der einmal durch ein Fest- und einmal durch ein Loslager gelagert wird. Die Knicklänge ist gleich groß wie die Stützenlänge.

Fall 3: Bei dem 3. Eulerfall ist der Stab auf der einen Seite fest eingespannt und auf der anderen Seite mit einem Loslager gelagert. Die Knicklänge entspricht dem 0,7-fachen der Stützenlänge.

Fall 4: In diesem Fall wird der Stab einmal fest eingespannt und einmal durch eine Schiebehülse (ähnlich fester Einspannung) gelagert. Die Knicklänge entspricht der halben Stützenlänge.

e) Beurteile, welcher der Knickfälle theoretisch am stabilsten ist. Gehe davon aus, dass alle anderen die Knickung beeinflussenden Faktoren gleich sind. Vervollständige anschließend die Regel „Je geringer die Knicklänge, desto …“.

Die Knickkraft entspricht der Kraft, bei der das Knicken eines Stabes beginnt. Sie sollte daher besonders hoch sein. Theoretisch ist daher der Knickfall 4 am stabilsten, denn:

Je geringer die Knicklänge, desto höher ist die Knickkraft.

f) Das Wievielfache kann die Stütze nach Eulerfall 4 im Vergleich zu Eulerfall 1 tragen? Erläutere.

Das 16-fache. Die Knickkraft hängt u.a. von der Einspannungsart ab. Da die Knicklänge quadratisch in die Gleichung für die Knickkraft eingeht und im Nenner steht, ist die Knickkraft bei Eulerfall 4 genau $4^2 = 16$ Mal größer als bei Eulerfall 1. (Oder 4 geteilt durch $\frac{1}{4} = 16$)

g) Begründe, warum in der Praxis am häufigsten die zweite Einspannungsart eingesetzt wird.

Der Eulerfall 2 wird bei fast allen Stützen aus Stahlbeton eingesetzt, da der Stab zum einen durch das Loslager die Möglichkeit hat, sich bei Temperaturänderungen auszudehnen und zum anderen durch das Festlager gesichert und statisch bestimmt ist.

Kopfnussaufgabe 4:

Erläutere, warum in der Praxis nur selten die Einspannungsarten 3 oder 4 eingesetzt werden.

Die Eulerfälle 3 und 4 sind nichts statisch bestimmt und können somit nicht berechnet werden.

Überprüfe die Eulerfälle auf ihre statische Bestimmtheit.

Alles bearbeitet? ☐

Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 8-6: Auf Biegen und Brechen

Berechnung der Biegespannung und ihre Anwendung, Festigkeitsberechnung.

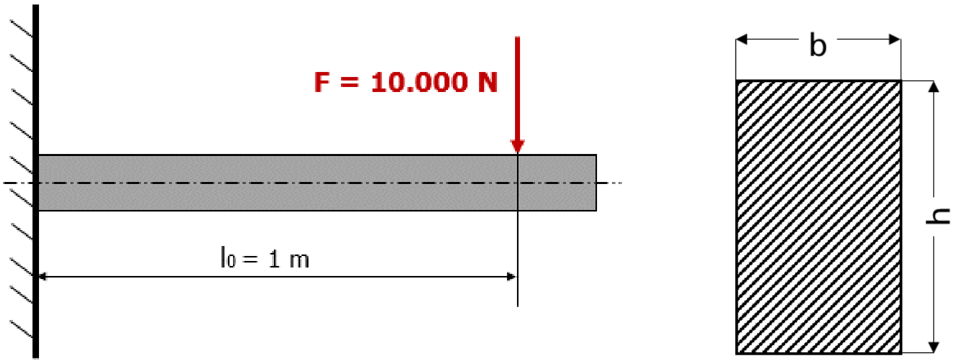


Abbildung 67: Beispiel Biegespannung

Aufgabe 6:

a) Ein Wandträger (b = 5cm; h = 10 cm) wird mit der Kraft F = 10 kN belastet. Berechne die Biegespannung für den skizzierten Querschnitt.

$$W_B = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{5\ \mathrm{cm} \cdot (10\ \mathrm{cm})^2}{6} = 83333{,}3\ \mathrm{mm}^3$$

$$\sigma_B = \frac{F\ \cdot l}{W} = \frac{10.000\ \mathrm{N}\ \cdot 1000\ \mathrm{mm}}{83333{,}3\ \mathrm{mm}^3} = 120{,}0 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

b) Vergleiche die Spannungsverteilung über den Querschnitt bei einer Zug- und Biegebeanspruchung.

Zug- und Druck: Die Spannung ist gleichmäßig über den Querschnitt verteilt.

Biegebeanspruchung: Die Randfasern werden stärker beansprucht. Die Spannung sinkt bis zur neutralen Faser gleichmäßig ab. Die Spannungsverteilung ist also linear.

c) Begründe unter Einbezug des Biegemomentes den Querschnitt der Träger in der Maschinenhalle.

Abbildung 68: Maschinenhalle

Das Widerstandsmoment der Träger ist so viel größer als wenn die Träger um 90° gedreht werden würden. Begründung siehe Aufgabe d)

d) Erläutere, was für Folgen es für die Biegespannung hat, wenn das Widerstandsmoment besonders groß ist?

Je größer das Widerstandsmoment, desto kleiner die Biegespannung:

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b} \text{ mit } W_b = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

Kopfnussaufgabe 5:

Ein Stab aus Eisen mit einem Kreisquerschnitt hat eine Betriebskraft von F = 10 kN aufzunehmen. Welcher Radius muss der Stab mindestens haben, damit die Festigkeitsbedingung erfüllt wird? Berechne. (Für Eisen gilt: σ_{zul} = 430 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, S = 1,5)

$$\sigma_{zul} = \frac{K}{S} = \frac{430\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}}{1{,}5} = 286{,}7\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$\sigma = \frac{F}{A} \rightarrow A = \pi \cdot r^2 = \frac{F}{\sigma}$$

$$r = \sqrt{\frac{F}{\sigma \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{10.000\ \mathrm{N}}{286{,}7\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \cdot \pi}} = 3{,}33\ \mathrm{mm}$$

TIPP

Festigkeitsberechnung: $\sigma \leq \sigma_{zul}$ bzw. $\frac{F}{A} \leq \frac{K}{S}$

Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 8-7: Bewehrungen, die sich bewährt haben

Optimierung und Konstruktion eines Betonbalkens für einen Wintergarten.

Abbildung 69: Wintergarten

Aufgabe 7:

Bei einem Haus soll vom Esszimmer ein direkter Zugang zu einem Wintergarten vorhanden sein. Die dafür nötige Wandöffnung hat eine Länge von 2,50 m. Ein Betonbalken muss die Belastung durch die darüberliegende Decke aufnehmen und diese Kräfte in das Mauerwerk übertragen.

a) Erläutere, welcher Belastungsart der Balken ausgesetzt ist. Fertige eine Skizze mitsamt Auflager an.

Biegebelastung mit einer Flächenlast. Die Konstruktionen über dem Balken wirken durch ihre Gewichtskraft in Form einer gleichmäßigen Flächenlast.

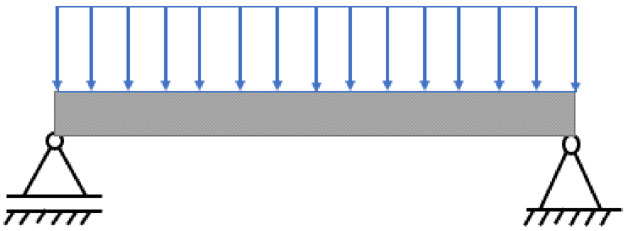


Abbildung 70: Lösung Aufgabe 8-6 a

b) Erkläre, was passieren wird, wenn der Betonbalken zu stark belastet wird. Zeichne hierzu eine Skizze mit den entstehenden Zug- und Druckkräften und den Rissen, die entstehen.

Beton als Werkstoff kann stark auf Druck, aber nur gering auf Zug beansprucht werden.

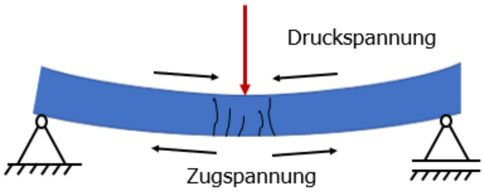


Abbildung 71: Lösung Aufgabe 8-6 b

An der Oberseite des Balkens wirken Druckkräfte, an der Unterseite Zugkräfte. Es bilden sich Risse an der Unterseite, die sich bis zur Oberseite ausbreiten. Das liegt daran, dass Beton zwar eine hohe Druck-, aber nur eine geringe Zugfestigkeit hat. Bei einer zu hohen Belastung bricht der Balken.

c) Die Streckenlast, die den Balken belastet, beträgt q = 1000 N/m. Der Balken ist 30 mm breit und 55mm hoch. Die zulässige Biegespannung liegt bei maximal 12 N/mm². Ist der Betonbalken ausreichend dimensioniert, um die Massivdecke zu halten? Berechne und begründe.

Die Formel für das Moment lautet in diesem Fall: $\boldsymbol{M_b = \frac{q \cdot l^2}{8}}$

$$W_b = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{30\ \mathrm{mm} \cdot (55\ \mathrm{mm})^2}{6} = 15125\ \mathrm{mm}^3$$

$$M_b = \frac{q\ \cdot l^2}{8} = \frac{1000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot (2{,}5\ \mathrm{m})^2}{8} = 781{,}25\ \mathrm{Nm}$$

$$\sigma_\mathrm{B} = \frac{M_\mathrm{b}}{W} = \frac{781250\ \mathrm{Nmm}}{15125\ \mathrm{mm}^3} = 51{,}65\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

Der Betonbalken ist nicht ausreichend dimensioniert, da die vorhandene Biegespannung über der zulässigen Biegespannung liegt.

d) Zur Verbesserung der Zugfestigkeit des Betons werden in der Baustatik sogenannte Bewehrungen eingesetzt. Als Bewehrung bieten sich hier zwei Stäbe aus Stahl an, die in den Betonbalken eingebracht werden. Skizziere wo die zwei Stäbe am besten eingesetzt werden sollten, um die Festigkeit des Balkens zu erhöhen. Begründe Deine Entscheidung.

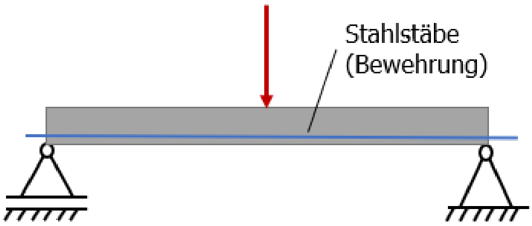


Abbildung 72: Lösung Aufgabe 8-6 d

Die Stahlbewehrung sollte an der unteren Seite des Betonbalkens angebracht werden. Hier können sie die Biegezugkräfte aufnehmen und die oberen Druckkräfte nimmt der Beton auf. Es kommt somit nicht mehr zum Bruch. Die Stahlbewehrung muss also stets in der Zugzone liegen.

Kopfnussaufgabe 6:

Leite die oben angegebene Formel für das Biegemoment her:

$$M_b = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

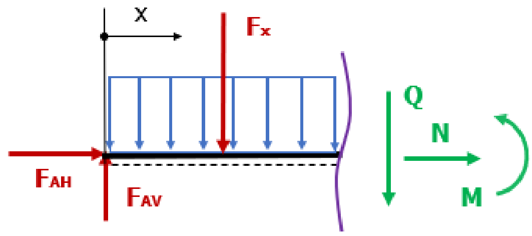


Abbildung 73: Lösung Aufgabe 8-6 Kopfnuss

$$F_{AV} = \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot l = F_{BV}$$

$$\sum M = -F_{AV} \cdot x + M + q_0 \cdot x \cdot \frac{1}{2} x = 0$$

$$M(x) = \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot l \cdot x - \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot x^2$$

$$M'(x) = \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot l - q_0 \cdot x = 0 \quad \rightarrow x = \frac{1}{2} l$$

$$M\left(\frac{1}{2} l\right) = \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot l \cdot \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot \left(\frac{1}{2} l\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot q_0 \cdot l^2 - \frac{1}{8} \cdot q_0 \cdot l^2 = \boldsymbol{\frac{1}{8} \cdot q_0 \cdot l^2}$$

TIPP

Schaue Dir nochmal die Aufgaben zu den Schnittgrößenverläufen in der Statik an.

Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 8-8: Festigkeitsberechnung

Arbeiten mit der Spannungs-Dehnungs-Kurve von Betonstahl, Festigkeitsberechnungen zur Dimensionierung einer Stahlbetonstütze durchführen.

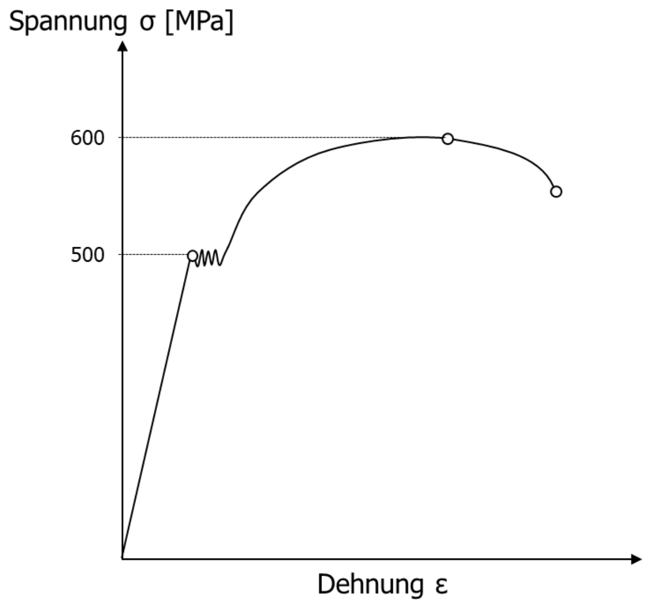


Abbildung 74: Spannungs-Dehnungs-Kurve von Betonstahl

Aufgabe 8:

Betonstahl wird überwiegend im Bau verwendet. Er wird in die Betonkonstruktion eingebracht und verstärkt diese. Die Festigkeitseigenschaften bei Zug und Biegung hängen vor allem von der Zugfestigkeit des Betonstahls ab. Diese kann durch Zugversuche ermittelt und daraufhin in einem Diagramm dargestellt werden.

a) Analysiere, in welchen Bereichen eine elastische und wo eine plastische Dehnung des Betonstahls stattfindet.

Bis zu der Streckgrenze findet eine elastische Dehnung nach dem Hookeschen Gesetz statt. Ab der Streckgrenze eine plastische Dehnung, ab der der sich der Betonstahl bleibend verformt.

b) Ermittle aus der Spannungs-Dehnungs-Kurve, wie stark Betonstahl maximal belastet werden kann, ohne sich langfristig zu verformen.

Ca. 500 N/mm²

Abbildung 75: Überdachungsprojekt Universität Stuttgart Vaihingen

c) Die Universität Stuttgart hat eine Firma mit der Überdachung eines Teils des Universitätsgeländes beauftragt. Es werden runde Stahlbetonstützen eingesetzt, um die Last der später hinzukommenden Decke aufzunehmen. Fertige eine Skizze an, wie die Stützen gelagert werden sollten. Begründe welchem Eulerfall diese Lagerung entspricht.

Die Lagerung entspricht mit einem Fest- und einem Loslager dem Eulerfall 2. Unten sollten die Stützen fest eingespannt werden, oben gelenkig, um eine Ausdehnung zu ermöglichen und Spannungen zu verhindern. Das System ist somit statisch bestimmt.

Abbildung 76: Lösung Exkurs 8 c

d) Im Sommer dehnt sich das Material um ca. 0,1 mm pro Meter und Kelvin aus. Berechne die Spannung, wenn die Temperatur um 10 Kelvin ansteigt und die Stützen eine Länge von 2,5 m haben. Ist Deine Lagerung für so eine Belastung geeignet? Begründe.

$\Delta l = 0{,}1 \, \frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{m \cdot K}} \cdot 2{,}5 \text{ m} \cdot 10 \text{ K} = 2{,}5 \text{ mm}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\Delta \boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l_0}} = \frac{2{,}5 \text{ mm}}{2500 \text{ mm}} = 0{,}1\ \%$$

Mit Hilfe des Spannungs-Dehnungs-Diagramms ergibt sich eine Spannung von ca. 250 N/mm.

e) Eine Stütze müsste für die Überdachung 118 kN aufnehmen. Da die Stützen ausschließlich auf Druck belastet sind, spielt hauptsächlich die Druckfestigkeit des Betons eine Rolle (C60 Schwerbeton mit Druckfestigkeit 60 N/mm²). Dimensioniere rechnerisch den Radius der Stütze aus Beton mit ausreichender Sicherheit. Nenne die Versagensarten, die bei dieser Belastung auftreten können,

$$\sigma \leq \sigma_{zul} \quad \rightarrow \quad \frac{F}{A} \leq \frac{K}{S}$$

$$\sigma_{zul,B} = \frac{60 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}}{4{,}0} = 15 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

Es handelt sich um einen spröden Werkstoff, der auf Druck belastet wird. D.h. es muss die Sicherheit 4,0 gewählt und gegen die Versagensart Bruch getestet werden.

$$\sigma_D = \frac{F_D}{A} = \frac{F_D}{\pi \cdot r^2} = \frac{118000 \, \mathrm{N}}{\pi \cdot r^2} \leq 15 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} \rightarrow r = \sqrt{\frac{118000 \, \mathrm{N}}{\pi \cdot 15 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}}} = 50 \, \mathrm{mm}$$

f) Der Planer überlegt sich, die Überdachung als Hängekonstruktion zu realisieren. Ein Stahlseil müsste dafür 245 kN aufnehmen. Dimensioniere rechnerisch den Radius des Seils mit ausreichender Sicherheit so, dass die Materialfestigkeit nicht überschritten wird. Nenne die Versagensarten, die bei dieser Belastung auftreten können.
(Stahl: E360| R_e = 360 MPa| R_m = 670 MPa)
Versagen durch Fließen oder Bruch. Test muss für beide Versagensarten erfolgen.

$$\sigma \leq \sigma_{zul} \quad \rightarrow \quad \frac{F}{A} \leq \frac{K}{S}$$

$$\sigma_{zul,F} = \frac{360 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}}{1{,}5} = 240 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

$$\sigma_{zul,B} = \frac{670 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}}{2{,}0} = 335 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

<table>
<tr>
<td></td>
<td colspan="2">Zulässige Spannung gegen Fließen ergibt kleinere maximal zulässige Spannung. Diese wird zur Dimensionierung herangezogen.

$\sigma_Z = \frac{F_Z}{A} = \frac{F_Z}{\pi \cdot r^2} \leq 240\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ → r = 18 mm

Kopfnussaufgabe 7:
Auch eine Werkzeugmaschinenspindel wird mit einem Fest- und einem Loslager gelagert. Hast Du eine Idee, wo das Loslager liegen sollte, um die Genauigkeit der Maschine nicht zu beeinträchtigen? Begründe.
Das Festlager sollte möglichst nahe an der Spindelspitze, also am Werkstück, liegen. Es führt die Spindel in axiale und radiale Richtung. Das Loslager sollte weiter weg von der Bearbeitungsstelle liegen. Wenn sich die Spindel bei der Bearbeitung erhitzt, geht die Verlängerung somit nicht Richtung Werkstück und man hat keine Genauigkeitsverluste. Die Steifigkeit nimmt mit der Entfernung des Schlittens vom Festlager hyperbolisch ab. Häufig werden Kugelrollenlager eingesetzt.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td colspan="2">Festigkeitsberechnung: $\sigma \leq \sigma_{zul}$ bzw. $\frac{F}{A} \leq \frac{K}{S}$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Alles bearbeitet? ☐</td>
<td>Ergebnis kontrolliert? ☐</td>
</tr>
</table>

Exkurs: Leichtbau aus dem 3D-Drucker?

Überlegungen zur Leichtbaufertigung mit dem 3D-Drucker und Versuchsaufbau zur vergleichenden Messung der Biegefestigkeit.

Für die fertigungstechnische Realisierung eines auf Biegung belasteten Leichtbauteils mittels 3D-Druck hast du verschiedene Möglichkeiten zur Anordnung des Bauteils auf der Druckfläche. Du druckst einen geraden Balken (s. Abbildung 77) mit den Maßen 150 mm x 20 mm x 7,5 mm in drei unterschiedlichen Positionen und möchtest experimentell ermitteln ob die Druckposition bei 20 % Ausfüllungsgrad einen Einfluss auf die Biegefestigkeit des Bauteils hat.

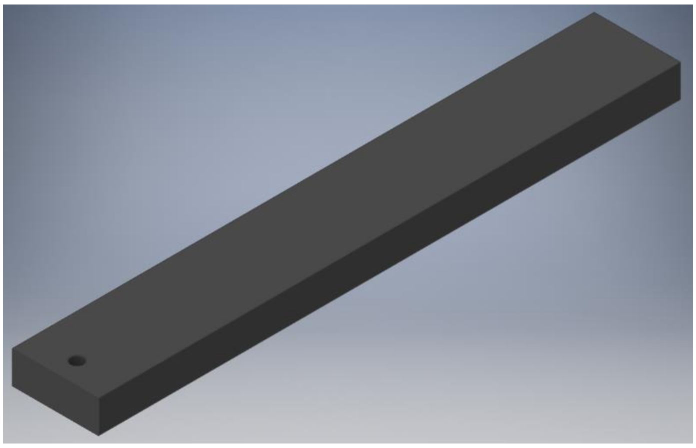


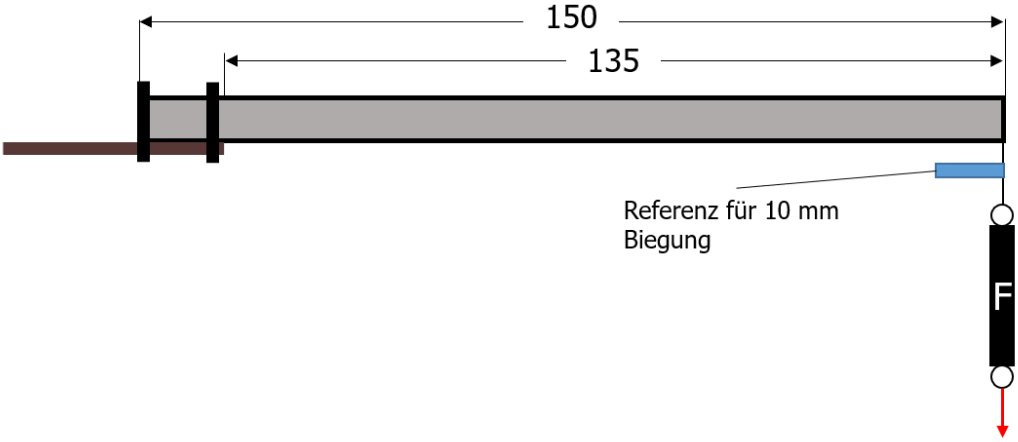
Abbildung 77: Zu untersuchendes Bauteil

Für den Versuchsaufbau stehen dir folgende Materialien zur Verfügung:

Schraubzwinge, Federkraftmesser 50N/100 N, Garn, Stativ mit Zubehör, gerader Stab, Messschieber, Tischplatte

Aufgabe 1:

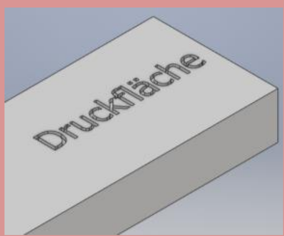
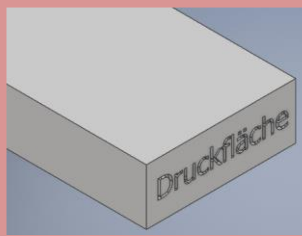
Entwickle und skizziere einen möglichen Versuchsaufbau zur Ermittlung des Flächenmoments der drei Balken unter Biegebeanspruchung.



Aufgabe 2:

Führe mit deinem Versuchsaufbau jeweils **fünf** Messungen pro Bauteil durch und dokumentiere die Messerwerte in der Nachfolgenden Tabelle.

Tabelle 1: Messwerte der drei Biegeversuche

Messung	Breite lange Seite 	Schmale lange Seite 	Schmale kurze Seite 
1	15,0 N	13,0 N	12,0 N
2	14,0 N	14,0 N	12,0 N
3	14,0 N	13,5 N	12,0 N
4	14,5 N	13,5 N	12,5 N
5	14,5 N	13,5 N	13,0 N
Ø *F*	**14,4 N**	**13,0 N**	**12,3 N**
I	**503,29 mm⁴**	**454,36 mm⁴**	**429,90 mm⁴**

Kopfnussaufgabe 1:

Vergleiche die gemessene Kraft bei der Biegung der Balken mit der FEM-Simulation eines fest fixierten 135 mm langen und ansonsten identischen Rechteck-Hohlprofils (Wandstärke 1 mm) mit 20 % Ausfüllungsgrad. Erkläre, weshalb sich dieses Profil stellvertretend für das Bauteil mit Netzstruktur für die Simulation eignet.

Die Simulation sollte einen Referenzwert für das Flächenmoment bei 20 % Ausfüllungsgrad liefern, da die Flächenmomente zusammengesetzter Bauteile mit identischem Schwerpunkt addiert werden dürfen. Deshalb sollte die Summe der Flächenmomente aus infinitesimal kleinen Abschnitten des Balkens mit gleichmäßiger Gitterstruktur prinzipiell dem Flächenmoment eines Balkens mit einem auf die Bauteilmitte komprimierten Infill entsprechen.

Das Flächenmoment aus der Simulation weicht mit $I = 502{,}28\ \text{mm}^4$ nur sehr wenig von dem ermittelten Wert aus der Messung $I = 503{,}29\ \text{mm}^4$ ab. Die Annahme ist somit bestätigt.

Aufgabe 3:

Überlege dir einen Optimierungsvorschlag für den Leichtbau-Balken mit 20 % Ausfüllung. Er soll stabiler gegen Biegebeanspruchung werden.

Eine mögliche Optimierung wäre es, den Balken schlanker, aber dafür höher zu gestalten, um sein Widerstandsmoment gegen Biegung zu vergrößern.

TIPP

Flächenmomente zusammengesetzter Bauteile mit identischer Achsrichtung dürfen addiert werden.

Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 9-1: Drehzahl, Drehmoment und Leistung von Motoren

Berechnung der Leistung und des Wirkungsgrades eines Elektromotors, Bestimmung der Leistungs- und Wirkungsgradlinie, Berechnung der maximalen Geschwindigkeit.

Tabelle 2: Ermittelte Kennwerte des GreenTeam-Elektromotors

n [1/Min]	50	1000	2000	4000	6000	8000
M [Nm]	27,82	26,63	26,12	25,82	26,01	25,88
P_{el} [W]	3256,5	6144,7	8800,3	14761,6	20284,3	25925,5

n [1/Min]	10000	12000	14000	16000	18000	20000
M [Nm]	25,49	23,86	25,42	22,37	20,10	17,81
P_{el} [W]	31477,7	34170,2	43059,1	41982,8	41230,7	40726,2

Aufgabe 1:

Die obige Tabelle gibt die erfassten Daten des Prüfstands für den neuen GreenTeam-Elektromotor bei dem durchgeführten Testlauf wieder.

a) Bestimme aus den Messdaten die Leistungskennlinie des Elektromotors. Berechne hierzu zunächst die entsprechenden Leistungen bei den gegebenen Drehzahlen (exemplarisch reicht die ausführliche Berechnung einer Leistung aus) und trage sie in die Tabelle ein.

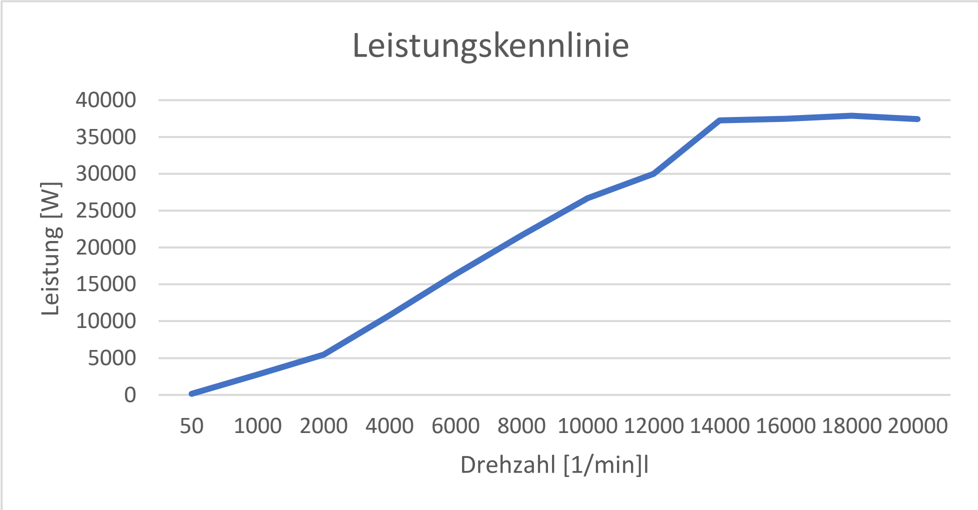
$$P = M \cdot 2 \cdot \pi \cdot n$$

Die Drehzahl muss zur Berechnung in 1/s angegeben werden (also durch 60 teilen). Die Berechnung erfolgt exemplarisch anhand der Drehzahl n = 50 1/min. Die Berechnung der weiteren Leistungen erfolgt analog dazu.

$$P_{50} = \frac{27{,}82\ \mathrm{Nm} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50\ \frac{1}{\mathrm{min}}}{60\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}}} = 145{,}7\ \mathrm{W}$$

n [1/Min]	50	1000	2000	4000	6000	8000
P_{nutz}[W]	145,7	2788,7	5470,6	10815,5	16342,6	21681,2

n [1/Min]	10000	12000	14000	16000	18000	20000
P_{nutz}[W]	26693	29983,4	37267,7	37481,3	37887,6	37426,8



b) Beschreibe die Leistungskennlinie des Elektromotors genauer und nenne die Unterschiede zu einem Verbrennungsmotor.

Beschreibung im Begleitheft in Kapitel 9.6 „Die Leistungskennlinie“ (S. 126).

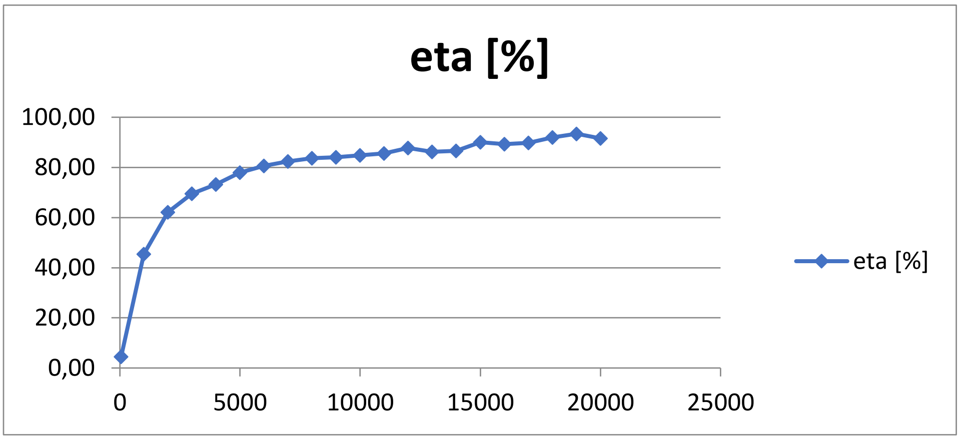
c) Berechne die Wirkungsgrade bei den einzelnen Drehzahlen (exemplarisch reicht die ausführliche Berechnung eines Wirkungsgrades aus). Trage die Werte in die Tabelle ein. Zeichne hierzu die Wirkungsgradkennlinie. Ermittle daraus den maximalen Wirkungsgrad.

$$\eta = \frac{P_{nutz}}{P_{auf}} = \frac{P_{nutz}}{P_{el}}$$

$$\eta_{50} = \frac{145{,}7\ \mathrm{W}}{3256{,}5\ \mathrm{W}} = 0{,}045\ \triangleq 4{,}5\ \%$$

n [1/Min]	50	1000	2000	4000	6000	8000
η [%]	4,5	45,4	62,2	73,3	80,6	83,6

n [1/Min]	10000	12000	14000	16000	18000	20000
η [%]	84,8	87,7	86,5	89,3	91,9	91,6



Es wird ein maximaler Wirkungsgrad von 91,9 % erreicht.

Kopfnussaufgabe 1:

Berechne die maximale Geschwindigkeit, die das GreenTeam-Rennfahrzeug in der nächsten Saison fahren kann, wenn die Übersetzung des Getriebes i = 1/13,5 und der Radradius r = 21 cm betragen?

$$v = \omega \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot r$$

Mit dem Einbezug des Getriebes gilt:

$$v = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot r \cdot i$$

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot 20000\ \frac{1}{\mathrm{min}} \cdot 0{,}21\ \mathrm{m} \cdot \frac{1}{13{,}5}}{60\ \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}}} = 32{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$40{,}3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 3{,}6\ \frac{\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{h}} = 117{,}3\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

Tipp: Für die Geschwindigkeit gilt: v = ω · r, außerdem musst Du das Ergebnis noch mit der Umsetzung des Getriebes i multiplizieren.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 10-1 Was bremst denn da?

Die Herleitung der Formel für die Reibungskraft.

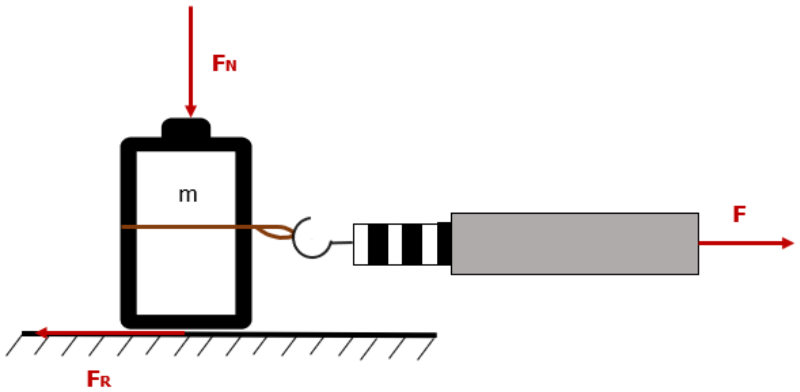


Abbildung 78: Reibungskraft

(angelehnt A. Böge 1990, S. 79)

Aufgabe 1:

Ein Gewicht mit einer Schlinge steht auf einem feststehenden Tisch. Befestige an der Schlinge einen Kraftmesser und ziehe vorsichtig daran.

a) Fange mit einer Masse von 1 kg an. Versuche, kurz bevor der Klotz anfängt sich zu bewegen, die benötigte Kraft abzulesen. Ziehe nun weiter an dem Klotz, bis er in Bewegung versetzt wird und notiere die dafür benötigte Kraft. Achte darauf, dass der Kraftmesser, wenn Du daran ziehst, parallel zum Tisch ausgerichtet ist. Erläutere, um welche Reibungskraft es sich jeweils handelt.

Messwerte: Wert 1 ca. 6,8 N, Wert 2 ca. 4,9 N (kann auch berechnet werden)

Zwischen den noch ruhenden Körpern wirkt die sogenannte Haftreibungskraft. Sie muss zur Bewegung des Gegenstandes überwunden werden. Erst wenn der Körper in Bewegung versetzt wird, handelt es sich um die Gleitreibung. Das ist die Reibung eines Körpers im Bewegungszustand. Die Haftreibung kann größere Werte annehmen als die Gleitreibung.

b) Wiederhole das Experiment mit der Masse m = 2 kg und 4 kg. Messe die Kraft die nötig ist, um den Klotz in Bewegung zu versetzen. Beschreibe, welchen Zusammenhang Du zwischen Gewichts- bzw. Normalkraft erkennen kannst.

Da sich jetzt die Gewichtskraft und somit die Normalkraft verdoppelt, ist auch die doppelte Kraft nötig, um den Klotz vorwärts zu bewegen → Die Reibungskraft ist proportional zur Normalkraft.

c) Benutze nun als Unterlage die Lederfolie. Messe wieder die Kraft. Was kannst Du beobachten? Erkläre durch welchen Parameter das Material in der Formel für die Reibungskraft mit einbezogen wird.

Die Reibungskraft ist abhängig von den verwendeten Werkstoffen. Deren Eigenschaften sind im Reibungskoeffizienten berücksichtigt.

Kopfnussaufgabe 1:

Die beiden Klötze haben die gleiche Masse und bestehen wie auch die jeweilige Unterlage aus demselben Material. Begründe, bei welchem der Körper eine höhere Kraft aufgewendet werden muss, um ihn einen Meter nach rechts zu ziehen.

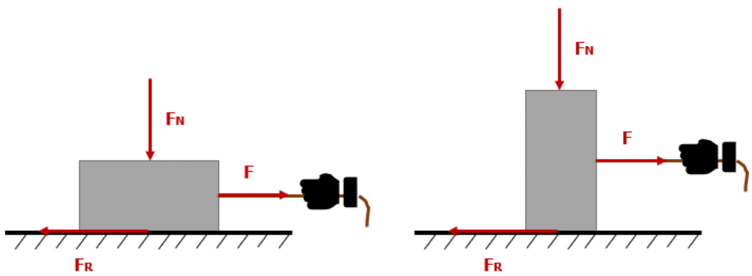


Abbildung 79: Reibungskraft

(angelehnt an H. Herr 1991, S. 98.)

Da die Größe der Reibung nur von der Normalkraft und dem Reibungskoeffizienten abhängt, ist sie von der Reibungsfläche unabhängig. Für die Verschiebung der beiden Klötze muss also die gleiche Kraft aufgewendet werden.

Tipp: Die Formel für die Gleitreibungskraft lautet:

$$F_R = \mu_R \cdot F_N$$

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 10-2: Haft- und Gleitreibung I

Vereinfachte Rechnungen mit der Reibungsformel.

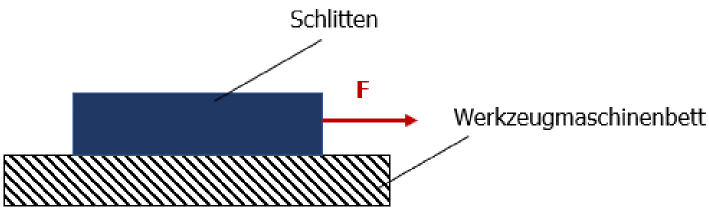


Abbildung 80: Reibungskraft

(angelehnt A. Böge 1990, S. 79)

Aufgabe 2:

Der Schlitten einer Werkzeugmaschine mit der Masse *m* = 50 kg liegt auf dem ebenen Maschinenbett. Der Haftreibungskoeffizient beträgt 0,7 und der Gleitreibungskoeffizient 0,5.

a) Berechne wie groß die Kraft *F* sein muss, damit der Ruhezustand gerade so aufgehoben wird.

$$F_G = m \cdot g = F_N$$

$$F_N = 50\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 490{,}5\ \mathrm{N}$$

$$F_{RH} = F_N \cdot \mu_H$$

$$F_{RH} = 490{,}5\ \mathrm{N} \cdot 0{,}7 = 343{,}35\ \mathrm{N}$$

b) Wie groß muss *F* sein, um eine gleichförmige Bewegung aufrecht zu erhalten? Berechne.

$$F_\mathrm{R} = \mu_\mathrm{R} \cdot F_\mathrm{N}$$

$$F_\mathrm{R} = 0{,}5 \cdot 490{,}5\ \mathrm{N} = 245{,}4\ \mathrm{N}$$

c) Während die Werkzeugmaschine produziert, wirken noch weitere Kräfte auf den Schlitten ein. Ermittle die Masse *m* des Schlittens, so dass die Reibungskraft während der Bewegung nicht größer als 300 N wird.

$$F_R = F_N \cdot \mu$$

$$F_N = \frac{F_R}{\mu} = \frac{300\ \mathrm{N}}{0{,}5} = 600\ \mathrm{N}$$

$$F_G = F_N = m \cdot g$$

$$m = \frac{F_N}{g} = \frac{600\ \text{N}}{9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 61{,}2\ \text{kg}$$

Kopfnussaufgabe 2:

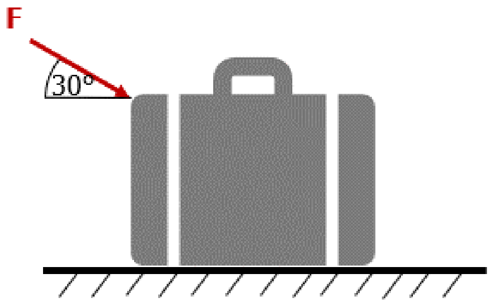


Abbildung 81: Reibungsbeispiel Koffer

Ein Koffer mit einer Gewichtskraft von F_G = 2000 N soll in horizontaler Richtung verschoben werden. Berechne die nötige Kraft F, so dass sich der Körper in Bewegung versetzt.

Zerlegen von F ergibt: $F_H = F \cdot cos(30)\,,\ F_V = sin(30) \cdot F$

Da die Horizontalkomponente von F mindestens so groß sein muss wie die Haftreibungskraft gilt: $F_H = F\ \cdot \cos(30) = \mu_0 \cdot F_N$

$$F_H = F\ \cdot \cos(30) = \mu_0 \cdot (F_G + F_V)$$

$$F\ \cdot \cos(30) = \mu_0 \cdot F_G + \mu_0 \cdot F \cdot \sin(30)$$

$$F\ \cdot \cos(30) - \mu_0 \cdot F \cdot \sin(30) = \mu_0 \cdot F_G$$

$$F\ \cdot (\cos(30) - \mu_0 \cdot \sin(30)) = \mu_0 \cdot F_G$$

$$F = \frac{\mu_0 \cdot F_G}{\cos(30) - \mu_0 \cdot \sin(30))} = \frac{0{,}5\ \cdot 2000}{\cos(30) - 0{,}5 \cdot \sin(30)} = 1623{,}3\ \text{N}$$

Tipp: Die Horizontalkomponente von F muss mindestens so groß wie die Haftreibungskraft sein. Beachte außerdem, dass F_N in diesem Fall auch die Vertikalkomponente von *F* beinhalten muss.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 10-3: Haft- und Gleitreibung II

Vereinfachte Rechnungen mit der Reibungsformel.

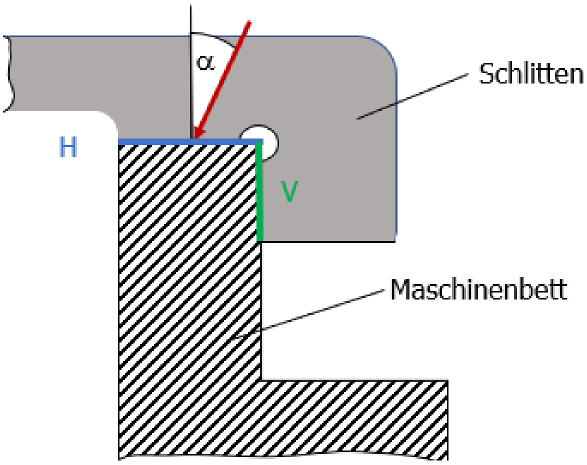


Abbildung 82: Reibungskraft

(angelehnt H. Herr 1991, S. 99)

Aufgabe 3:

Die Abbildung zeigt eine Werkzeugmaschinenführung. Diese wird durch eine schräge Kraft F = 200 N belastet. Der Winkel α beträgt 25° und der Reibungskoeffizient μ = 0,1.

a) Berechne, wie groß die Normalkräfte auf den Flächen H und V sind.

$$F_H = F \cdot \cos(\alpha) = 200\ \text{N}\ \cdot \cos(25) = 181{,}3\ \text{N}$$

$$F_V = F \cdot \sin(25) = 200\ \text{N} \cdot \sin(25) = 84{,}5\ \text{N}$$

b) Ermittle, wie groß die Reibungskräfte an diesen Flächen sind.

$$F_{RH} = \mu \cdot F_H = 0{,}1\ \cdot 181{,}3\ \text{N} = 18{,}13\ \text{N}$$

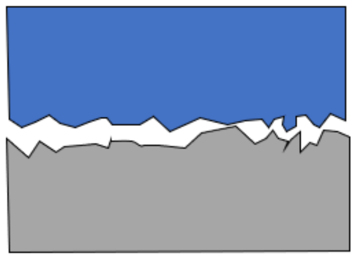
$$F_{RV} = \mu \cdot F_V = 0{,}1\ \cdot 84{,}5\ \text{N} = 8{,}45\ \text{N}$$

c) Berechne die gesamte Reibungskraft, die zu einer Verschiebung führt.

$$F_R = F_{RH} + F_{RV} = 18{,}13\ \mathrm{N} + 8{,}45\ \mathrm{N} = 26{,}58\ \mathrm{N}$$

Kopfnussaufgabe 3:

Warum bedarf es einer größeren Kraft die Haftreibung zu überwinden, wenn die beiden Körper gegeneinander verschoben werden, als eine bestehende Bewegung beizubehalten? Betrachte hierzu die Abbildung und begründe.



1 cm ≙ 1 µm

Abbildung 83: Oberflächen

Keine Oberfläche ist vollständig glatt. Im Mikrometerbereich sind Oberflächen immer etwas uneben. Diese Unebenheiten können dann verhaken. Möchte man die Körper gegeneinander verschieben, so muss diese Verhakung zunächst überwunden werden. Sind die Verhakungen überwunden, bedarf es weniger Kraft die Körper gegeneinander zu verschieben. Somit ist die Haftreibung in der Regel größer als die Gleitreibung.

Tipp: Schaue Dir die Beschaffenheit der Oberflächen genauer an.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 10-4: Einfach mal rollen lassen …

Vereinfachte Rechnungen zur Rollreibung.

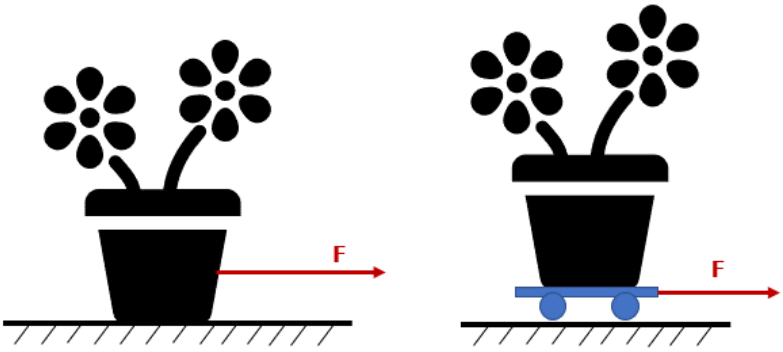


Abbildung 84: Rollreibung

Aufgabe 4:

Anna möchte im Sommer den schweren Blumentopf mit einer Masse *m* von 20 kg aus der Wohnung auf den Balkon stellen.

a) Zunächst versucht sie den Topf durch ziehen vorwärts zu bewegen. Berechne, wie groß hierbei die Haft- und Gleitreibung ist. (μ_0 = 0,5; μ_R = 0,3)

$$F_N = F_G = m \cdot g = 20\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 200\ \mathrm{N}$$

$$F_{R0} = F_N \cdot \mu_0 = 200\ \mathrm{N} \cdot 0{,}5 = 100\ \mathrm{N}$$

$$F_R = F_N \cdot \mu_R = 200\ N \cdot 0{,}3 = 60\ N$$

b) Nach einer Weile gehen Anna die Kräfte aus und sie kauft ein kleines Wägelchen mit 4 Rollen, auf das sie den Blumentopf stellt. Der Durchmesser der Rollen beträgt 5 cm. Berechne, wie groß die Reibungszahl ist, wenn *f* = 0,5 cm.

$$r = \frac{d}{2} = \frac{5\ \mathrm{cm}}{2} = 2{,}5\ \mathrm{cm}$$

$$\mu_{RR} = \frac{f}{r} = \frac{0{,}5\ \mathrm{cm}}{2{,}5\ \mathrm{cm}} = 0{,}2$$

c) Berechne die gesamte Reibungskraft und die Reibungskraft pro Rolle.

$$F_{RR} = F_N \cdot \mu_{RR} = 200\ \text{N} \cdot 0{,}2 = 40\ \text{N}$$

Pro Rolle: 40 N : 4 = 10 N pro Rolle

d) Hat sich der Kauf des Wägelchens für Anna gelohnt? Begründe.

Der Kauf des Wägelchens hat sich gelohnt, da die Reibungskraft jetzt auf 40 N gesunken ist. Anna muss somit weniger Kraft aufbringen, um den Blumentopf zu transportieren.

Kopfnussaufgabe 4:

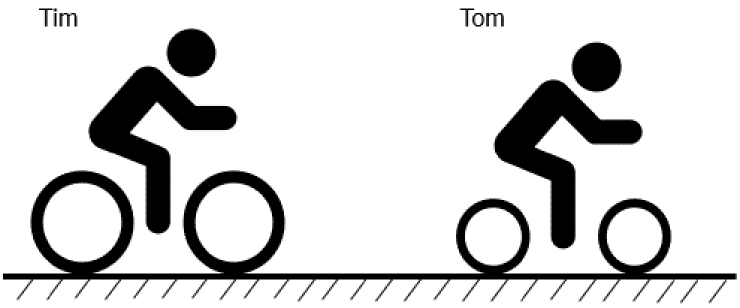


Abbildung 85: Rollreibung Fahrräder

Tim und Tom machen eine Fahrradtour. Im Gegensatz zu Toms Räder, sind Tims deutlich größer. Überlege Dir, ohne zu rechnen, wer von den beiden eine größere Rollreibung überwinden muss und erläutere Dein Ergebnis.

Die Rollreibungskraft wird mit abnehmendem Radradius kleiner, da der Radius im Nenner der Formel steht. Tom hat daher beim Fahrradfahren eine geringere Rollreibung zu überwinden.

Tipp: Ziehe in Deine Überlegungen die Formel für die Rollreibung mit ein.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Exkurs: Einen reibungslosen Ablauf durch Lager

	Die Kenntnisse über Lager anwenden, Lagerkräfte und Rollreibung berechnen, einen Festigkeitsnachweis durchführen und ein passende Lagerart aus einem Lagerkatalog mittels einer Lagerberechnung auswählen.

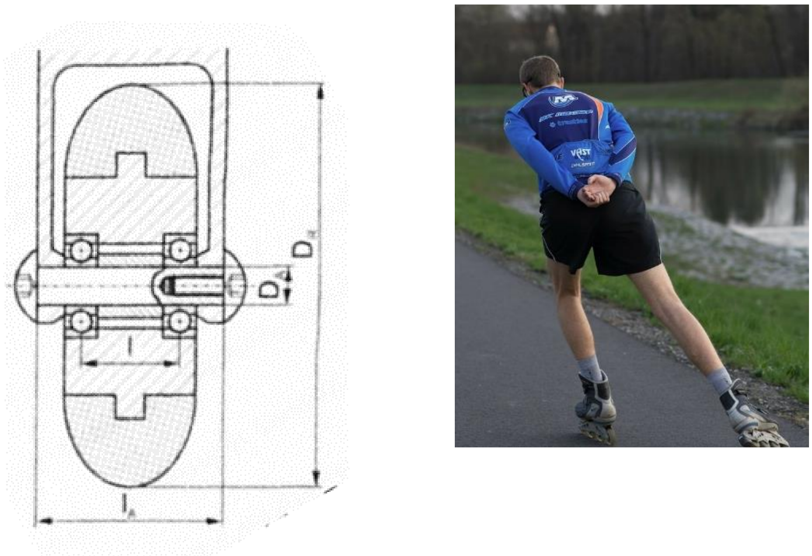


Abbildung 86: links: Lagerung einer Rolle, rechts: Inlineskater
(Altklausur Grundzüge der Maschinenkonstruktion)

Angegebene Werte:

Durchschnittsgeschwindigkeit: v = 30 km/h

Personengewicht G = 800 N

Rollenaußendurchmesser d_R = 80 mm

Gesamtlänge der Achse l_A = 34 mm

Lagerabstand l_L = 16 mm

Abbildung 87: Ersatzbild für eine Rolle

?

Aufgabe 1:

Alle Rollen von Inlinern oder Skateboards werden mit Lagern ausgestattet. Die Qualität dieser Lager beeinflusst vor allem die Fahrgeschwindigkeit und die Lebensdauer.

a) Ermittle, mit welchem Körpergewicht ein Lager belastet wird, wenn der Skater senkrecht auf beiden Inlinern steht.

Pro Schuh: ½ F_P

Pro Rolle: 1/8 F_p

Pro Lager: 1/16 F_P

b) Begründe, welche Lagerart für diesen Fall geeignet ist.

Kugellager, da die auftretende Reibung geringer ist.

c) Nenne die Aufgaben der Lager für die Inliner.

Lager beschränken die Freiheitsgrade der relativ zueinander bewegten Elemente. Das wäre im Fall der Inliner die Führung der Rollen um die Welle. Sie sorgen zudem für eine möglichst reibungsarme Übertragung der Kräfte. Dadurch gibt es wenig Materialverschleiß und man kann mit den Inlinern höhere Geschwindigkeiten und eine längere Lebensdauer erzielen.

d) Analysiere mittels der technischen Zeichnung (s. Abbildung 86), ob es sich bei der Lagerung der Inliner jeweils um Fest- oder Loslager handelt.

Es handelt sich um 2 Festlager, da keine Bewegung der Lager in axialer oder radialer Richtung möglich ist.

e) Berechne die Lagerkräfte in den Lagern A und B. Fertige hierzu zunächst einen Freischnitt an.

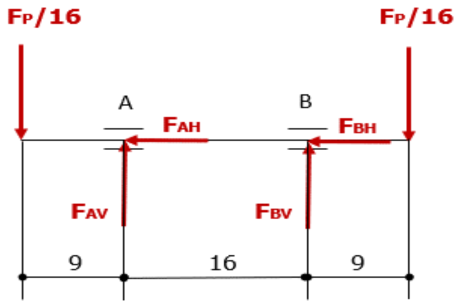


Abbildung 88: Lösung Aufgabe Exkurs Lager 1e

$F_{AH} = F_{BH} = 0$

$$M_A \circlearrowleft = \frac{F_P}{16} \cdot 9\,\text{mm} + F_{BY} \cdot 16\,\text{mm} - \frac{F_P}{16} \cdot (16+9)\text{mm}$$

Mit $F_P = 800$ N folgt für $F_{BY} = 50$ N

$$\sum V = -\frac{F_P}{16} + F_{AV} + F_{BV} - \frac{F_P}{16}$$

$F_{AV} = 50$ N

f) Dimensioniere die Achse (schwingungsfrei, ohne Kerbe) für eine Fertigung aus dem Stahl E295 mittels eines Festigkeitsnachweises (Materialkennwerte: $R_e = 300$ MPa, $S_F = 2$).

Aufstellen der Festigkeitsbedingung: $\sigma_{b,max} \leq \sigma_{b,zul}$

$\sigma_{b,max} = \frac{M_b}{W_b}$ mit $M_b = 2 \cdot \frac{800\,\text{N}}{16} \cdot 17\,\text{mm}$ und $W_b = \frac{\pi}{32} \cdot d^3$

$$\frac{M_b}{W_b} \leq \frac{R_e}{S_F} \rightarrow \frac{M_b}{W_b} \leq \frac{300\,\text{MPa}}{2}$$

$$\rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{\frac{2 \cdot F}{16} \cdot 17\,\text{mm}}{\frac{\pi}{32} \cdot \sigma_{zul}}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{2 \cdot 800\,\text{N}}{16} \cdot 17\,\text{mm}}{\frac{\pi}{32} \cdot 150\,{}^{\text{N}}/_{\text{mm}^2}}} = 4{,}87\,\text{mm} \approx 5\,\text{mm}$$

g) Berechne die Reibungskraft, die auf eine Rolle wirkt (f = 24 mm)

$$F_{RR} = F_N \cdot \mu_{RR}$$

$$F_{RR} = F_N \cdot \frac{f}{r}$$

$$F_{RR} = \frac{F_P}{8} \cdot \frac{f}{r}$$

$$F_{RR} = \frac{800\,\text{N}}{8} \cdot \frac{24\,\text{mm}}{40\,\text{mm}} = 60\,\text{N}$$

h) Berechne die Gesamtreibungskraft auf einen Inliner.

$$F_{RRGesamt} = 4 \cdot F_{RR} = 4 \cdot 60\ \mathrm{N} = 240\ \mathrm{N}$$

i) Eine häufige Versagensursache bei Inlinern ist ein Lagerschaden. Wähle aus dem Lagerkatalog ein passendes Rillenkugellager aus, sodass die Lebensdauer ca. 100.000 h beträgt (d = 5 mm).

$$L_h = \frac{10^6}{60 \cdot n} \cdot \left(\frac{C_r}{P}\right)^p$$

Die Drehzahl *n* erhält man aus der Winkelgeschwindigkeit und diese wiederrum aus der Geschwindigkeit:

$$\omega = 2\pi \cdot n \rightarrow n = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$v = \omega \cdot r \rightarrow \omega = \frac{v}{r}$$

$$n = \frac{\frac{v}{r}}{2\pi} = \frac{v}{2\pi \cdot r} = \frac{30 : 3{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\ \pi \cdot 0{,}04\ \mathrm{m}} = 33{,}16\ \frac{1}{\mathrm{s}}$$

Mit der Bedingung, dass der zuvor berechnete Durchmesser *d* = 5 mm beträgt, kommen zwei dynamische Tragzahlen *Cr* in Frage:

Cr_1 = 1320 N, Cr_2 = 2600 N

$$L_{h1} = \frac{10^6}{60 \cdot 33{,}16 \cdot 60\ \frac{1}{\mathrm{min}}} \cdot \left(\frac{1320\ \mathrm{N}}{50\ \mathrm{N}}\right)^3 = 154179\ \mathrm{h}$$

$$L_{h2} = \frac{10^6}{60 \cdot 33{,}16 \cdot 60\ \frac{1}{\mathrm{min}}} \cdot \left(\frac{2600\ \mathrm{N}}{50\ \mathrm{N}}\right)^3 = 1178214\ \mathrm{h}$$

Aus wirtschaftlichen Gründen kommen die Lager mit einer dynamischen Tragzahl von 1320 N in Frage. Das sind die Rillenkugellager mit dem Kurzzeichen 625, 625-2RSR, 625-2Z.

Kopfnussaufgabe 1:

Nenne Eigenschaften, die Lager neben der Vermeidung von Reibung und Verschleiß in einer Maschine noch erfüllen müssen. Teile die Eigenschaften in technische und ökonomische Eigenschaften sowie in Betriebseigenschaften ein.

Technische Eigenschaften: geringes Spiel, gute Dämpfung, hohe Führungsgenauigkeit

Ökonomische Eigenschaften: kostengünstig, gute Montierbarkeit

Betriebseigenschaften: hohe Sicherheit, hohe Lebensdauer, Schmutzunempflindlichkeit, geringe Wartung

Tipp: Die Drehzahl kann aus der Geschwindigkeit ermittelt werden.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐