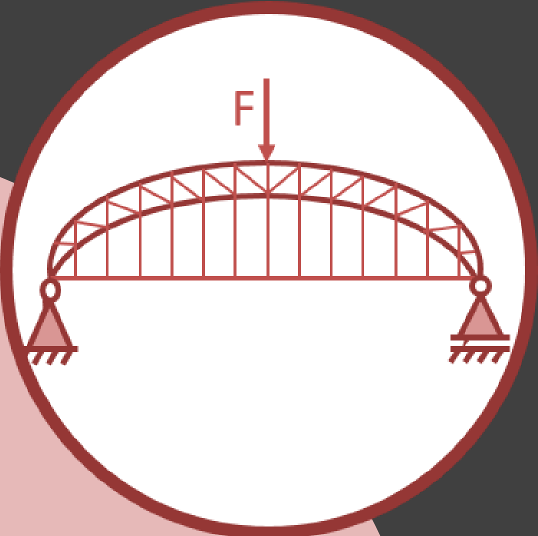
Universität Stuttgart
Institut für Erziehungswissenschaft

MINT Teacher Lab



Lehr- und Lernmaterialien für
Naturwissenschaft und Technik (NwT)

Zendler | Brändle

Technische Mechanik

Stuttgart, Februar 2022

Redaktionelle Bearbeitung

Wissenschaftliche Leitung	Prof. Dr. Bernd Zinn, Universität Stuttgart
Autoren	Sina Zendler und Marcus Brändle
Inhaltliche / fachliche Unterstützung	Prof. Dr. Bernd Zinn und Mira Latzel
Hilfskräfte	Jan Nowak
Lektorat	Mira Latzel und Marcus Brändle

Die vorliegenden Lehr- und Lernmaterialien zum Themenbereich *Technische Mechanik* wurden am Institut für Erziehungswissenschaft der Universität Stuttgart entwickelt und fokussieren die Weiterbildung von Lehrkräften im gymnasialen Unterrichtsfach Naturwissenschaft und Technik (NwT). Die Materialentwicklung erfolgte im Rahmen der Qualitätsoffensive Lehrerbildung im Projekt *Lehrerbildung Plus* mit einer Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung (FKZ: 01JA1607A). Die Weiterbildung von Lehrkräften erfolgt im Projekt *MINT Teacher Lab* an der Universität Stuttgart. Das *MINT Teacher Lab* wird von der Vector Stiftung gefördert und sieht neben der Konzeptionierung eines modernen schulischen Klassenraums die Unterstützung der professionsorientierten Lehreraus- und Weiterbildung in den MINT-Lehramtsfächern im Großraum Stuttgart-Ludwigsburg vor.

Die konzipierten Lehr- und Lernmaterialien bieten zum einen in den Kapiteln 5 und 6 mit den Themen *Die Kraft* und *Drehmomente* eine grundlegende Einführung in den Themenbereich *Technische Mechanik* und sind als Basiswissen der gymnasialen Oberstufe für die Klassenstufen des Profilfachs in der Mittelstufe bzw. für Wiederholungseinheiten in der Kursstufe angedacht. Curricular aufbauend darauf folgen mit den Kapiteln 7, 8, 9 und 10 die Themen *Statik*, *Festigkeitslehre*, *Dynamik* und *Reibung*, welche im Bezugsfeld des Bildungsplans für die vier- bzw. fünfstündige Kursstufe der gymnasialen Oberstufe ausgearbeitet wurden und die darin aufgeführten inhaltsbezogenen Kompetenzen zur *Technischen Mechanik* in ihrer Gänze abdecken. Zu den einzelnen Themen wurden Aufgaben konzipiert, die die theoretischen Aspekte der *Technischen Mechanik* jeweils aufgreifen, auf Basis von Experimenten und beispielhaften ingenieurswissenschaftlichen Anwendungsbezügen veranschaulichen und so zu deren Absicherung beitragen. In jedem Kapitel wird zudem ein Exkurs exemplarisch zur praktischen Umsetzung oder Anwendung vorgestellt, der ergänzend zu den theoretischen Inhalten in der Unterrichtspraxis behandelt werden kann. Für das Kapitel *Dynamik* steht zur praktischen Veranschaulichung eines Elektromotorprüfstands am Beispiel des *GreenTeams* der Universität Stuttgart zusätzlich ein digitales Selbstlernmodul zur Verfügung.

Impressum

Herausgeber: Prof. Dr. Bernd Zinn und Mira Latzel
MINT Teacher Lab
Universität Stuttgart
Institut für Erziehungswissenschaft
Berufspädagogik mit Schwerpunkt Technikdidaktik (BPT)
Azenbergstraße 12
70174 Stuttgart
Internetseite: http://www.uni-stuttgart.de/bpt/
E-Mail: mtl@ife.uni-stuttgart.de

Druck und Vertrieb: MINT Teacher Lab
Universität Stuttgart
Institut für Erziehungswissenschaft
Berufspädagogik mit Schwerpunkt Technikdidaktik (BPT)
Azenbergstraße 12
70174 Stuttgart
Internetseite: http://www.uni-stuttgart.de/bpt/
E-Mail: mtl@ife.uni-stuttgart.de

Lehrerbildung PLUS

MINT Teacher Lab

Gefördert vom
Bundesministerium für Bildung und Forschung

Gefördert von
VECTOR STIFTUNG

Inhaltsverzeichnis

1. Abgleich Bildungsplan 2016

In diesem Kapitel wird der Bezug der Lehr- und Lernmaterialien zu den aktuellen Bildungsplänen für die Mittel- und Oberstufe im gymnasialen Fach Naturwissenschaft und Technik (NwT) des Bundeslands Baden-Württemberg aufgeführt. Die Inhalte der Lehr- und Lernmaterialien *Technische Mechanik* wurden dafür mit den in den Bildungsplänen der Mittel- und der drei- bzw. fünfstündigen Kursstufe aufgelisteten prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen abgeglichen. Bei den inhaltsbezogenen Kompetenzen ist jeweils markiert (rot hinterlegt), zu welchen Themen Aufgaben entwickelt wurden. Bei der Kennzeichnung handelt es sich nur um eine Orientierungshilfe. Je nach Klasse bzw. Klassenstufe müssen Lerninhalte gegebenenfalls intensiver oder weniger intensiv unterrichtet werden.

Mittelstufe

1.1 Denk- und Arbeitsweisen in Naturwissenschaft und Technik: Systeme und Prozesse

1) Systeme analysieren und durch Systemgrenzen und Teilsysteme beschreiben (zum Beispiel Lebewesen, Maschinen, Sonnensystem)
2) Energie-, Stoff- und Informationsströme zwischen Teilsystemen erklären (zum Beispiel Treibhauseffekt, Stoffwechsel, GPS)
3) Wechselwirkungen (positive und negative Rückkopplung) zwischen Teilsystemen beschreiben (zum Beispiel Atemfrequenzanpassung, chemisches Gleichgewicht, Drehzahlregelung, Klimawandel)
4) Veränderungen in Systemen als Prozesse beschreiben (Prozessschritt, Teilprozess, Eingabe-Verarbeitung-Ausgabe-Prinzip)
5) Teilsysteme durch ihre äußeren Funktionen beschreiben (Black-Box-Denken; zum Beispiel Sinneszelle, Batterie)

1.2 Energie und Mobilität

1.2.1 Energie in Natur und Technik

1) Die Bedeutung der Sonne für das Leben auf der Erde erläutern (zum Beispiel Fotosynthese, Windsysteme, Schiefe der Ekliptik)

2) die Begriffe Energiespeicher und Energieübertragung erläutern (zum Beispiel Körpertemperatur von Tieren, elektrochemischer Energiespeicher, Gebäudeheizung, Atmosphäre)

3) Energieübertragungsketten in Systemen grafisch darstellen und erklären (zum Beispiel Lebewesen, Maschinen)

4) Energiedichten oder Speicherkapazitäten vergleichen (zum Beispiel Brennwert, latente Wärme)

5) Energieumsätze abschätzen, berechnen und vergleichen

6) aus individuellen oder regionalen Energieumsätzen eigenes und gesellschaftliches Handeln ableiten

7) Wirkungsgrade und Leistungen berechnen und vergleichen (Wirkungsgrad in Energieübertragungsketten)

1.2.2 Energieversorgungssysteme

1) Grundbegriffe der Energieversorgung beschreiben (zum Beispiel fossile und regenerative Energieträger, Grund- und Spitzenlast)

2) verschiedene Möglichkeiten der Nutzbarmachung von Energie beschreiben (Photovoltaik, Solarthermie, Windenergie, thermische Kraftwerke; höchster theoretischer Wirkungsgrad, zum Beispiel Carnotwirkungsgrad oder Betz'sche Leistungsentnahme)

3) Möglichkeiten der Energieversorgung hinsichtlich ökologischer und wirtschaftlicher Kriterien vergleichen und bewerten

4) ein Funktionsmodell eines energietechnischen Systems entwickeln, konstruieren, fertigen und die Energieumsetzung quantitativ auswerten (zum Beispiel Windkraftanlage, Photovoltaik, Anlage mit Brennstoffzelle, elektrochemischer Energiespeicher)

5) Eignungsfaktoren eines Standorts für ein Energieversorgungssystem analysieren (zum Beispiel naturräumliche, technische, gesellschaftliche, ökologische, wirtschaftliche Faktoren)

<u>1.2.3 Bewegung und Fortbewegung</u>

1) Bewegungen in Natur und Technik vergleichen (zum Beispiel aktive und passive Bewegungen)

2) Antriebsmöglichkeiten für Bewegungsabläufe beschreiben (zum Beispiel Muskel, Elektromotor)

3) Rückstoß, Auftrieb oder Reibung als Ursache für die Fortbewegung in Natur und Technik beschreiben (zum Beispiel Rakete, Heißluftballon)

4) Hebelwirkung, Drehmomente und Drehzahlen bestimmen (zum Beispiel Zusammenwirken von Muskulatur-Knochen-Gelenk, Motor-Welle-Lager)

5) Systeme zur Wandlung von Dreh- und Längsbewegungen erläutern

6) Übersetzungen dimensionieren und Getriebe konstruieren (Drehrichtung, Drehzahl, Drehmoment)

7) ein Objekt mit Antrieb entwickeln, konstruieren, fertigen und optimieren

1.3 Stoffe und Produkte

1.3.1. Eigenschaften von Stoffen

1) Eigenschaften von Stoffen bestimmen (zum Beispiel Löslichkeit, Leitfähigkeit, Brennbarkeit, Zugfestigkeit, Härte, Wasserspeicherfähigkeit)

2) die Eignung von Stoffen für einen bestimmten Zweck erläutern

3) Stoffeigenschaften mit einfachen Modellen auf Teilchen- oder mikroskopischer Ebene erläutern

1.3.2. Statische Prinzipien in Natur und Technik

1) den statischen Aufbau von natürlichen und technischen Systemen analysieren (geometrische Konstruktion, Stabilität des Dreiecks, Profile)

2) Zug- und Druckkräfte zweidimensional geometrisch oder rechnerisch bestimmen (zum Beispiel Brücke, Kran, Körperbau)

1.3.3. Produktentwicklung

1) ein Produkt mit definierter Funktion und bestimmter Eigenschaft entwickeln, konstruieren und normorientiert darstellen (zum Beispiel Windkraftanlage, Messgerät, Maschine)
2) Analogien zwischen technischen Produkten und natürlichen Systemen erläutern (zum Beispiel Lotuseffekt, Wärmedämmung, Stabilität von Konstruktionen)

3) Roh- und Werkstoffe ressourcenschonend auswählen und nutzen (Verschnitt, Ökobilanz)

4) mit Werkzeugen und Maschinen ein Produkt fertigen (Verfahren zum Trennen, Fügen, Umformen, zum Beispiel computergestützte Fertigung)

5) Funktion und Eigenschaften eines Produkts bewerten und Optimierungsansätze entwickeln

1.3.4. Stoffströme und Verfahren

1) natürliche und technische Stoffströme und Stoffkreisläufe erläutern (zum Beispiel Kalk-, Wasserkreislauf, atmosphärische Zyklen, Entstehung chemischer Elemente)

2) einen verfahrenstechnischen Herstellungsprozess und die darin enthaltenen Grundoperationen erläutern (chemische, thermische oder biochemische Verfahren)

3) in einem chemisch-technischen Verfahren ein Produkt realisieren und den Herstellungsprozess oder das Produkt optimieren (zum Beispiel Sonnencreme, Bioethanol, Zuckerherstellung, Produkt aus Gummi)

1.4 Informationsaufnahme und –Verarbeitung

1.4.1. Informationsaufnahme durch Sinne und Sensoren

1) Die Verwendungsmöglichkeiten von Sensoren beschreiben (zum Beispiel Blutdruckmessgerät, Hygrometer, Anemometer)
2) Bau und Funktionsweise eines Sinnesorgans mit einem entsprechenden technischen Sensor vergleichen (zum Beispiel Auge mit Digitalkamera, Ohr mit Mikrofon)
3) die Gefährdung von Auge oder Ohr durch Überlastung beschreiben und persönliches Handeln von gesundheitlichen Grenzwerten ableiten
4) die Gesetzmäßigkeit zwischen subjektivem Erleben und Intensität des physikalischen Reizes erläutern (zum Beispiel Lichtintensität, Lautstärke, Schwereempfinden)
5) die Erweiterung menschlicher Sinnesleistungen durch Sensoren erläutern (zum Beispiel IR-Sensor, Hörgerät, Wärmebildkamera, Barometer)

1.4.2. Gewinnung und Auswertung von Daten

1) Bedingungen für zuverlässige Messungen erläutern und Messverfahren optimieren (systematische und zufällige Messfehler, Standardabweichungen, Randbedingungen oder Einflussgrößen, Kontrollmessungen oder Reproduzierbarkeit)

2) an einem ausgewählten Beispiel direkte und indirekte Messverfahren vergleichen

3) Messdaten mithilfe von Software auswerten und darstellen (Standardabweichungen, Tabellenkalkulation)

4) ein optisches oder akustisches Spektrum darstellen und auswerten (zum Beispiel Sonnenspektrum, Leuchtmittel aus dem Haushalt, Ton und Klang)

5) raumbezogene Daten darstellen und nutzen (zum Beispiel thematische Karten zur Sonneneinstrahlung oder Windstärke, Wetterkarten, Geoinformationssysteme)

6) Verfahren zur räumlichen Orientierung beschreiben (zum Beispiel astronomische Orientierung, satellitengestützt Navigation)

1.4.3. Informationsverarbeitung

1) Beispiele der analogen oder digitalen Informationscodierung aus Natur und Technik beschreiben (zum Beispiel digitale Dateiformate, maschinenlesbare Code-Systeme, DNA)
2) die Funktionsweise gesteuerter oder geregelter Systeme analysieren und dazu Energie-, Stoff- und Informationsströme untersuchen (zum Beispiel effiziente Energienutzung, Entwicklung eines Objekts mit Antrieb, Herstellung eines Produkts in einem chemisch-technischen Verfahren, physiologischer Regelkreis)
3) das Prinzip der Steuerung darstellen und erklären (zum Beispiel Robotik)
4) das Prinzip der Regelung auch unter Verwendung der Begriffe Sollwert, Istwert, Regelgröße und Störgröße darstellen und an Beispielen aus der Natur und der Technik erklären (zum Beispiel Körpertemperatur des Menschen, chemisches Gleichgewicht, Klimawandel: Mittlere Oberflächentemperatur der Erde, Oberflächentemperatur von Himmelskörpern)
5) Elemente einer Programmiersprache beschreiben (zum Beispiel Bedingung, Verzweigung, Schleife, Zähler, Zeitglied, Unterprogramm, Programmbausteine)
6) Algorithmen für zeit- und sensorgesteuerte Prozesse in einer Programmiersprache darstellen und damit Steuerungsabläufe realisieren (zum Beispiel Ampelsteuerung, Robotik)
7) Algorithmen für zeit- und sensorgesteuerte Prozesse entwickeln, beschreiben und darstellen
8) Chancen und Risiken der Informationstechnik für Individuum und Gesellschaft erläutern (zum Beispiel Simulation, Datenschutz, Internet of Things, Geoinformationssysteme, autonomes Fahren)

1.4.4. Elektronische Schaltungen

1) die Funktion von Bauteilen elektrischer oder elektronischer Schaltungen beschreiben (Schalter, Widerstand, Leuchtdiode, Transistor)
2) Schaltungen entwickeln, Bauteile dimensionieren und auswählen (Schaltplan, Datenblatt, Vorwiderstand, Spannungsteiler)
3) elektrische oder elektronische Schaltpläne analysieren und in einfachen Fällen entwickeln
4) elektrische oder elektronische Schaltungen realisieren und ihre Funktionsfähigkeit untersuchen

Kursstufe

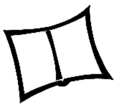
3.4.3.1. Technische Mechanik Basisfach

1) ebene statische Systeme analysieren (unter anderem Wertigkeit von Lagern und Gelenken, statische Bestimmtheit).
2) Spannungs-Dehnungs-Diagramme auswerten (unter anderem Elastizitätsmodul E, Hookesches Gesetz $\sigma = E \cdot \Delta l / l$, Dehngrenze $R_{p0,2}$, Zugfestigkeit R_m).
3) die maximale Durchbiegung eines Balkens mittels Experiment, Simulation und Berechnung (Tabellenbuch) bestimmen und Träger für verschiedene Last- und Lagerfälle dimensionieren.
4) belastete Werkstücke durch Simulation auf Spannungen und Verformung untersuchen und deren Form im CAD-Modell optimieren (zulässige Zugspannung $\sigma_{z,zul}$, Sicherheitsfaktor v).

3.4.3.2. Technische Mechanik Leistungsfach

1) ebene statische Systeme analysieren (u. a. Wertigkeit von Lagern und Gelenken, eingeprägte Kräfte und Momente, statische Bestimmtheit).
2) Lagerreaktionen in ebenen statischen Systemen unter der Verwendung des Schnittprinzips und der Gleichgewichtsbedingungen bestimmen.
3) den Zusammenhang zwischen Normalspannung σ und relativer Dehnung ε experimentell erfassen, in einem Diagramm darstellen und Spannungs-Dehnungs-Diagramme auswerten (unter anderem Elastizitätsmodul E, Hookesches Gesetz $\sigma = E \cdot \Delta l / l$, Dehngrenze $R_{p0,2}$, Zugfestigkeit R_m).
4) den Zusammenhang zwischen Last, Geometrie, Elastizitätsmodul und maximaler Durchbiegung von Balken experimentell erfassen und zusammen mit der Theorie der Euler'schen Knickstäbe zur Dimensionierung von Trägern in verschiedenen Last- und Lagerfällen nutzen.
5) belastete Werkstücke durch Simulation auf Spannungen und Verformung untersuchen und deren Form im CAD-Modell optimieren (zulässige Zugspannung $\sigma_{z,zul}$, Sicherheitsfaktor ν).

2. Zeichenerklärung

Ziel	
Übung	
Frage	
Buch	
Tipp / Hinweis Allgemein, führt nicht direkt zur Aufgabenlösung	
Fachwissen	 © Winter & Rieck
Merke	
Kopfnussaufgabe: Zusatzaufgabe, die freiwillig gemacht werden kann	 © Winter & Rieck
Leistungsfach Inhalte, die über das Basisfachniveau hinaus re-levant für das Leistungsfach sind	
Zusatzwissen Ergänzende und vervollständigende Informatio-nen über die Bildungsplaninhalte hinaus	

3. Formeln und Einheiten

3.1 Größen und ihre Einheiten

Tabelle 1: Größen und ihre Einheiten

Größe	Formelzeichen	Einheit
Anzahl der Auflagerreaktionen	a	-
Anzahl der Knoten in einem Fachwerk	k	-
Anzahl der Mauersteine	S	-
Anzahl der Stäbe in einem Fachwerk	s	-
Anzahl der starren Körper	k	-
Anzahl der Zwischenreaktionen	z	-
Arbeit	W	J = Nm
Axiales Flächenmoment	I	mm^4
Beschleunigung	a	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Breite	b	m
Dehnung	ε	- bzw. %
Dehngrenze (0,2 %)	$R_{p0,2}$	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$
Drehmoment	M	Nm
Drehzahl	n	$\frac{1}{\mathrm{min}}\ \mathrm{bzw.} \frac{1}{\mathrm{s}}$
Druckspannung	σ_D	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$
Dynamische Tragzahl	C_r	N
Elastizitätsmodul	E	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$
Erdbeschleunigung	g	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Exponent der Lebensdauergleichung	p	-
Flächenlast	q	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$
Freie Knicklänge	s_k	m
Freiheitsgrade	f	-

Tabelle 1: Größen und ihre Einheiten (Fortsetzung)

Frequenz		f	$\frac{1}{\mathrm{min}}$
Gleitreibungskoeffizient		μ_{R}	-
Haftreibungskoeffizient		μ_H	-
Hebelarm		l	m
Hebelarm des Rollwiderstands		f	M
Knickspannung		σ_K	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$
Kraft		F, mehrere: F_x mit x = 1, 2, 3, …	N $(= \frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2})$
	Auflagerkraft	F_{xH} oder F_{xV} mit x = A, B, C, …	
	Gewichtskraft	F_G	
	Gleichgewichtskraft	F_{Gg}	
	Gleitreibungskraft	F_R	
	Haftkraft	F_{RH}	
	Horizontalkraft	F_H	
	Knickkraft	F_K	
	Normalkraft	N_x mit x = 1, 2, 3, …	
	Normalkraft Reibung	F_N	
	Querkraft	Q_x mit x = 1, 2, 3, …	
	Resultierende	F_{res}	
	Rollreibungskraft	F_{RR}	
	Vertikalkraft	F_V	
Kraftarm		s_K	m
Länge		l	m
Längenänderung		Δl	m
Lastarm		s_L	m
Lebensdauer		L_h	Jahre
Leistung		P	$1 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{S}} = 1 \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}} = 1\ \mathrm{W}$
Masse		m	kg
Öffnungsmaß		X	mm
Querschnittsfläche		A	m² bzw. mm²
Radius		r	m

Tabelle 1: Größen und ihre Einheiten (Fortsetzung)

Reibungszahl des Rollwiderstands	μ_{RR}	-
Sicherheitsbeiwert	S	-
Spannung	σ	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$
Streckgrenze	R_e	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$
Umlaufdauer	T	min
Ursprungslänge	l_0	M
Werkstoffkennwert	K	-
Widerstandsmoment	W	cm^3
Winkelgeschwindigkeit	ω	$\frac{1}{\mathrm{min}}$
Wirkungsgrad	η	- bzw. %
Zeit	t	s
Zugfestigkeit	R_m	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$
Zugspannung	σ_Z	$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$

3.2 Formelsammlung Technische Mechanik

Tabelle 2: Formelsammlung Kraft

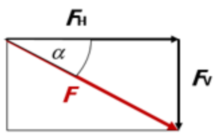
Größe	**Formel**	**Genauere Beschreibung**
Kraft (Grundgesetz der Dynamik)	$F = m \cdot a$	F = Kraft [N] m = Masse des Körpers [kg] a = Beschleunigung $[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$
Gewichtskraft	$F_G = m \cdot g$	F_G = Gewichtskraft [N] g = Erdbeschleunigung (hier: 9,81 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$)
Resultierende	$R = \sum_{i=1}^{n} F_i$ Geometrisch: Kräfteplan	Die Resultierende entsteht durch die beliebige Aneinanderreihung der Einzelkräfte.
Resultierende einer Flächenlast	$R = q \cdot A$	R = Resultierende [N] q = Flächenlast $[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}]$ A = Flächeninhalt [m²]
Zerlegung einer Kraft	$F_H = F \cdot \cos(\alpha)$ $F_V = F \cdot \sin(\alpha)$	 analytisch und geometrisch möglich
Reaktionskraft	$- F_G = F_G$`	Reaktionsprinzip: actio = reactio

Tabelle 3: Formelsammlung Drehmomente

Größe	**Formel**	**Genauere Beschreibung**
Hebelgesetz	$s_L \cdot F_L = s_K \cdot F_K$	s_L = Lastarm [m], F_L = Last [N] s_K = Kraftarm [m], F_K = Kraft [N]
Drehmoment	$M = F \cdot l$	M = Drehmoment [Nm] F = Kraft [N] l = Hebelarm [m]

Tabelle 4: Formelsammlung Statik

Größe	**Formel**	**Genauere Beschreibung**
Gleichgewichtsbedingungen	Erste Gleichgewichtsbedingung der Statik: $\sum V = 0$ Zweite Gleichgewichtsbedingung der Statik: $\sum H = 0$ Dritte Gleichgewichtsbedingung der Statik: $\sum M = 0$	
Statische Bestimmtheit	$f = 3k - (a + z)$	f = Freiheitsgrade k = Anzahl der starren Körper a = Anzahl der Auflagerreaktionen z = Anzahl der Zwischenreaktionen (bei einem Gelenk mit 2 Stäben $z = 2$)
Statische Bestimmtheit Fachwerke	$f = 2k - (a + s)$	k = Anzahl der Knoten a = Lagerreaktionen s = Anzahl der Stäbe
Zusammenhänge Schnittgrößen	$\frac{dQ}{dx} = -q(x)$ $\frac{dM}{dx} = Q$	q = Lastverteilung $[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}]$ Q = Querkraftverlauf [N] M = Momentenverlauf [N]
Oktametrisches System: Öffnungsmaß	$X = S \cdot 125 + 1$	$\mathrm{X} = \text{Öffnungsbreite}\ [\mathrm{mm}]$ $\mathrm{S} = \text{Anzahl der Mauersteine}\ []$

Tabelle 5: Formelsammlung Festigkeitslehre

Größe	**Formel**	**Genauere Beschreibung**
Die mechanische Spannung	$\sigma = \frac{F}{A}$	σ = Spannung $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right]$ F = Kraft [N] A = Querschnittsfläche [mm²]
Die Dehnung	$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$	ε = Dehnung [] Δl = Längenänderung (gesprochen: Delta l) [m] $\Delta l = l - l_0$ (l = vorhandene Länge) l_0 = Ursprungslänge [m]
Das Hookesche Gesetz	$\sigma = \varepsilon \cdot E$	σ = Spannung $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right]$ ε = Dehnung [] E = Elastizitätsmodul $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right]$
Zugspannung	$\sigma_\mathrm{Z} = \frac{F_\mathrm{Z}}{A}$	σ_z = Zugspannung $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right]$ F_Z = Zugkraft [N] A = Querschnittsfläche [mm²]
Druckspannung	$\sigma_\mathrm{D} = -\frac{F_\mathrm{D}}{A}$	σ_D = Druckspannung $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right]$ F_D = Druckkraft [N] A = Querschnittsfläche [mm²]
Knickspannung	$\sigma_K = \frac{F_K}{A}$	σ_K = Knickspannung $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right]$ F_K = Knickkraft [N] A = Querschnittsfläche [mm²]
Knickkraft	$F_\mathrm{K} = \frac{E \cdot I \cdot \pi^2}{(s_\mathrm{K})^2}$	E = Elastizitätsmodul $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right]$ I = axiales Flächenmoment [mm⁴] s_K = freie Knicklänge [mm] l = Stablänge [mm]

Tabelle 5: Formelsammlung Festigkeitslehre (Fortsetzung)

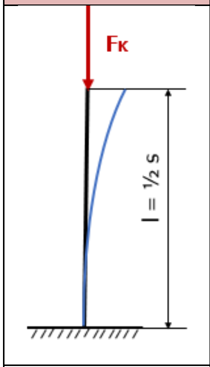
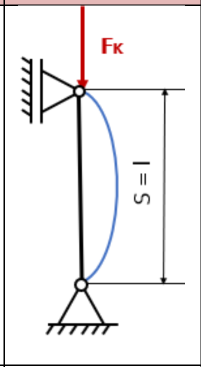
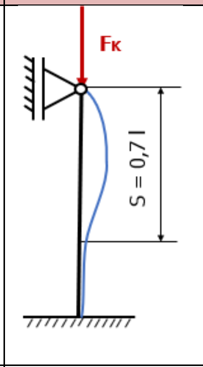
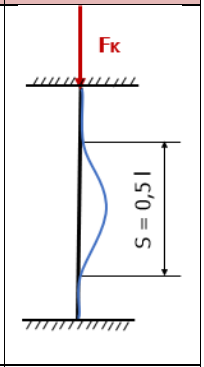
<table>
<tr><td rowspan="4">Eulersche Knickfälle</td><td>Knickfall 1</td><td>Knickfall 2</td><td>Knickfall 3</td><td>Knickfall 4</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$s_k = 2l$</td><td>$s_k = l$</td><td>$s_k = 0,7l$</td><td>$s_k = 0,5l$</td></tr>
<tr><td>$F_K = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$</td><td>$F_K = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$</td><td>$F_K = 2\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$</td><td>$F_K = 4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$</td></tr>
<tr><td>Biegespannung</td><td colspan="2">$\sigma_B = \frac{M_b}{W}$</td><td colspan="2">σ_B = Biegespannung $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$
M_b = Biegemoment [Nm]
W = Widerstandsmoment [cm³]</td></tr>
<tr><td>Maximale Durchbiegung bei fester Einspannung</td><td colspan="2">$w_{max} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$</td><td colspan="2">$w_{max}$ = maximale Durchbiegung [mm]
F = Kraft am Ort der maximalen Durchbiegung [N]
l = Länge des Balkens [mm]
I = axiales Flächenmoment [mm⁴]
E = Elastizitätsmodul $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$</td></tr>
<tr><td>Festigkeitsbedingung</td><td colspan="2">$\sigma \leq \sigma_{zul}$
$\frac{F}{A} \leq \frac{K}{S}$</td><td colspan="2">$\sigma$ = wirkende Spannung $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$
F = Kraft [N]
A = Querschnittsfläche [m²]
σ_{zul} = zulässige Spannung $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$
K = Werkstoffkennwert
S = Sicherheitsbeiwert</td></tr>
</table>

Tabelle 6: Formelsammlung Dynamik

Größe	**Formel**	**Genauere Beschreibung**
Definition Drehzahl	$n = \frac{\Delta Z}{\Delta t}$	n= Drehzahl $\left[\frac{1}{\mathrm{min}}\right]$ ΔZ = Zahl der Umdrehungen Δt = Zeitintervall
Drehzahl	$n = \frac{1}{T}$	n= Drehzahl $\left[\frac{1}{\mathrm{min}}\right]$ T= Umlaufdauer [min]
Winkelgeschwindig-keit	$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n = 2 \cdot \pi \cdot f$	ω = Winkelgeschwindigkeit $\left[\frac{1}{\mathrm{min}}\right]$ n = Drehzahl $\left[\frac{1}{\mathrm{min}}\right]$ f = Frequenz $\left[\frac{1}{\mathrm{min}}\right]$
Leistung	$P = \frac{W}{t}$	P= Leistung $[1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\ \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}} = 1\ \mathrm{W}]$ W = Arbeit [J = Nm] t = Zeit [s]
Leistung Motor	$P = M \cdot \omega$ $P = M \cdot 2 \cdot \pi \cdot n$	P= Leistung $[1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\ \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}} = 1\ \mathrm{W}]$ M = Drehmoment [Nm] ω = Winkelgeschwindigkeit $\left[\frac{1}{\mathrm{min}}\right]$ n = Drehzahl $\left[\frac{1}{\mathrm{min}}\right]$
Wirkungsgrad	$\eta = \frac{P_{nutz}}{P_{auf}} < 1$	η = Wirkungsgrad $[-\ \mathrm{bzw.}\ \%]$ P_{nutz}= Nutzleistung [W] P_{auf} = aufgewendete Leistung [W]

Tabelle 7: Formelsammlung Reibung

Größe	**Formel**	**Genauere Beschreibung**
Coulombsche Reibungsgesetz	$F_R \sim F_N$	F_R = Reibungskraft F_N = Normalkraft
Haftreibung	$F_{RH} = \mu_H \cdot F_N$	μ_H = Haftreibungskoeffizient [] F_N = Normalkraft [N]
Gleitreibung	$F_R = \mu_R \cdot F_N$	μ_R = Gleitreibungskoeffizient [] F_N = Normalkraft [N]
Rollwiderstand	$F_{RR} = F_N \cdot \mu_{RR}$	F_N = Normalkraft[N] μ_{RR} = Reibungszahl des Rollwiderstands []
Reibungszahl des Rollwiderstands	$\mu_{RR} = \frac{f}{r}$	f = Hebelarm des Rollwiderstands [m] r = Radius [m] μ_{RR} = Reibungszahl des Rollwiderstands []
Lagerberechnung: Lebensdauer	$L_h = \frac{10^6}{60 \cdot n} \cdot \left(\frac{C_r}{P}\right)^p$	L_h = Lebensdauer [h] C_r = dynamische Tragzahl [N] n = Drehzahl [1/min] P = dynamisch äquivalente Belastung [N] p = Exponent der Lebensdauergleichung (= 3 bei einem Kugellager mit Punktberührung)

3.3 Die gebräuchlichsten Vorsätze für Maßeinheiten

Tabelle 8: Die gebräuchlichsten Vorsätze für Maßeinheiten

Symbol	**Bezeichnung**	**Wert**
m	Milli	10^{-3}
c	Zenti	10^{-2}
d	Deka	10
k	Kilo	10^3
M	Mega	10^6

4. Einführung

4.1 Bedeutung der Technischen Mechanik

23. November 2013, 07:50 Uhr, Riga © Süddeutsche Zeitung

Mehr als 50 Tote bei Einkaufszentrum-Einsturz

In Lettland herrscht Staatstrauer: Der Einsturz eines Einkaufszentrums gilt als das schwerste Unglück in diesem Land seit mehr als 20 Jahren. Die Zahl der Toten ist auf 52 angestiegen. Mindestens 25 Menschen werden immer noch vermisst.

(…) Medienberichten zufolge war das im Jahr 2011 errichtete Gebäude kürzlich renoviert worden. Es war auch für einen Architekturpreis nominiert. (…)

Warum das Dach des erst zwei Jahre alten Einkaufszentrums am Donnerstagabend plötzlich einbrach, ist unklar. (…)

Nach heutigen Kenntnissen wurde der Einsturz durch einen Berechnungsfehler in der statischen Planung des Gebäudes verursacht. Demnach seien durch falsche Lastannahmen Knoten der Fachwerkkonstruktion nicht richtig bemessen worden, was letztendlich zu dem Unglück führte.

In Natur und Technik gibt es ständig Kräfte, die auf Körper einwirken. Dadurch kann sich der Körper bewegen, verformen oder er kann wie bei dem tragischen Unglück in Riga sogar einstürzen. Besonders für technische Anwendungen ist es daher wichtig zu wissen, welche Auswirkungen diese Kräfte haben.

4.2 Einteilung der Technischen Mechanik

Die Technische Mechanik (hier kurz TM) beschäftigt sich mit den Bewegungen, mechanischen Beanspruchungen und Gleichgewichten von materiellen Körpern, die unter dem Einfluss von Kräften stehen. Sie bildet die Grundlage für viele Ingenieurwissenschaften.

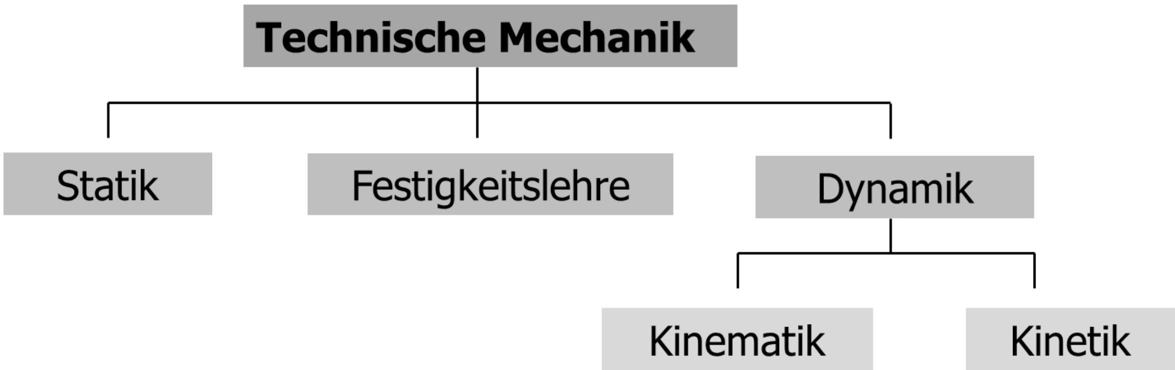


Abbildung 1: Gliederung der Technischen Mechanik

Teilgebiete der TM sind - betrachtet nach den physikalischen Vorgängen - die Kinematik und die Dynamik. Das Wort **Kinematik** leitet sich aus dem griechischen ab und bedeutet so viel wie Bewegung. Definiert wird die Kinematik als die Lehre von den Bewegungsabläufen fester Körper, allerdings wird hier die ursächliche Kraft außen vorgelassen. Im Maschinenbau wird zum Beispiel eine Bewegung erwünscht. Die **Dynamik** (aus dem Altgriechischen *dynamis* = Kraft) untersucht dagegen den Einfluss von Kräften auf die daraus resultierenden Bewegungen von Körpern und stellt Beziehungen zwischen der Beschleunigung und der dafür erforderlichen Kraft her. Die Dynamik wird dahingehend in die Statik und die Kinetik unterteilt.

Während die **Kinetik** die Bewegungen von Körpern unter dem Einfluss von äußeren und inneren Kräften betrachtet, umfasst die **Statik** die Betrachtung von Kräften an ruhenden Körpern. Vor allem im Bauwesen müssen Bewegungen ausgeschlossen werden oder anders ausgedrückt: an einem Gebäude müssen sich alle Kräfte im Gleichgewicht befinden, da eine Bewegung ja zum Einsturz führen kann. Dies zu erfüllen ist die Aufgabe der Statik. Sie ist die Lehre vom Gleichgewicht.

Wenn alle Gleichgewichtskräfte an einem Gebäude bekannt sind, kommt noch ein weiteres Gebiet dazu, die **Festigkeitslehre**. Mit Hilfe der Festigkeitslehre kann man nachweisen, dass die ausgesuchten Werkstoffe die Kräfte aufnehmen können und Formänderungen und weitere Beanspruchungen im Toleranzbereich bleiben. Bei der Konstruktion und Dimensionierung eines Gebäudes zum Beispiel spielen also vor allem die Festigkeitslehre als auch die Statik eine große Rolle.

5. Die Kraft

Die Kraft stellt einen der zentralen Begriffe der TM dar, insbesondere in Hinblick auf die Statik und soll daher in diesem Kapitel näher behandelt werden. Sie wird als physikalische Größe definiert, die in ihrer Wirkung mit einer Gewichtskraft gleichwertig ist. Eine Kraft ist meistens erst erkennbar, wenn sie Verformungen oder Bewegungen an einem Bauteil hervorruft. Sir Isaac Newton präzisierte den Begriff letztendlich in einem Bewegungssystem.

5.1 Darstellung der Kraft

Die Kraft wird mit dem Symbol F (von englisch force = Kraft) abgekürzt. Als Maßeinheit verwendet man das Newton (kurz: N). Sie ist eine gerichtete Größe, ein sogenannter **Vektor**.

Eine Kraft ist durch die folgenden drei Eigenschaften bestimmt:

- Ihren Betrag (ein Maß für die Größe der wirkenden Kraft)
- Ihre Richtung (die Wirkungslinie)
- Ihren Angriffspunkt

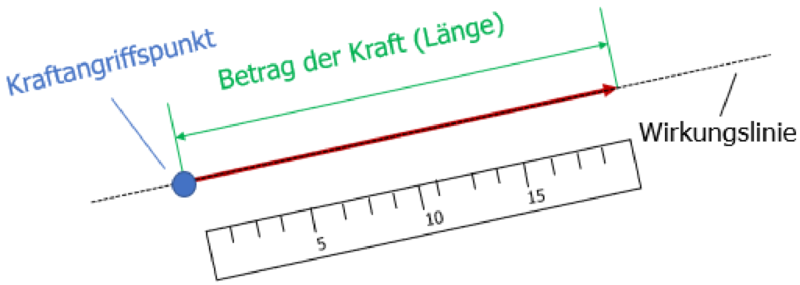


Abbildung 2: Die drei Eigenschaften einer Kraft

(angelehnt an Böge, A. 1990, S. 2)

Vektoren in der Mathematik und Physik

Ein **Vektor** ist eine Verschiebung und wird durch einen Pfeil dargestellt. Er wird durch einen Betrag und eine Richtung definiert. Hierzu ein kleines Gedankenexperiment: man stellt sich vor, man möchte jemandem den Weg beschreiben. Für eine exakte Wegbeschreibung würde die Richtung nicht ausreichen, sondern es ist immer auch die Entfernung (der Betrag) notwendig. In der Physik sind die Kraft oder die Geschwindigkeit Beispiele für **gebundene Vektoren**, da sie noch zusätzlich einen Angriffspunkt besitzen.

5.2 Newton´sche Axiome

Isaac Newton (1643-1727), ein berühmter englischer Physiker und Mathematiker seiner Zeit, stellte drei grundlegende Gesetze (Axiome) der Mechanik auf. Vor allem das Grundgesetz der Dynamik beschreibt wichtige Zusammenhänge in Bezug auf die Kraft und wird daher in der Technischen Mechanik häufig zur Berechnung der Gewichtskraft benötigt. Auch auf das Reaktionsprinzip wird in den nächsten Kapiteln noch mehrfach zurückgegriffen.

Die Newton´schen Axiome

1. **Trägheitsprinzip:** Ein Körper behält seine Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit bei, solange keine Kraft von außen auf ihn einwirkt
2. **Aktionsprinzip**: Die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße (Impuls) ist gleich der äußeren Kraft. Dieses **Grundgesetz der Dynamik** beschreibt den Zusammenhang zwischen der Masse *m* und der Kraft *F*:

$$F = m \cdot a$$

$F =$ Kraft [N]
$m =$ Masse des Körpers [kg]
$a =$ Beschleunigung $[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$

Eine Kraft, die ständig auf uns einwirkt, ist die Erdanziehungskraft.

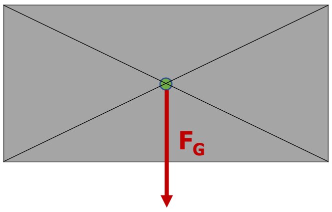
Für die Gewichtskraft *G* durch die Erdanziehung (Gravitation) gilt:

$$F_G = m \cdot g$$

$F_G =$ Gewichtskraft [N]
$\mathrm{g} =$ Ortsfaktor (hier: $9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$)

3. **Reaktionsprinzip (Wechselwirkungsprinzip):** Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleich große, aber entgegengesetzte Kraft von Körper B auf Körper A (reactio). Kurz: actio = reactio.

Die resultierende Gewichtskraft F_G greift stets im Schwerpunkt des Körpers an. In einem Rechteck liegt dieser genau in der Mitte.



Blatt 5-1: Was ist eine Kraft?

5.3 Hauptachsen im Raum

Wie wir bereits wissen, wird eine Kraft unter anderem durch ihre Richtung definiert. Die Richtung entscheidet darüber, wohin sich ein Körper bewegt. Möchte man mit mehreren Kräften rechnen, ist es unerlässlich, diese durch die Wahl des richtigen Vorzeichens in die Rechnung mit einzubeziehen. Bei der Wahl des richtigen Vorzeichens orientiert man sich am besten an einem Koordinatensystem.

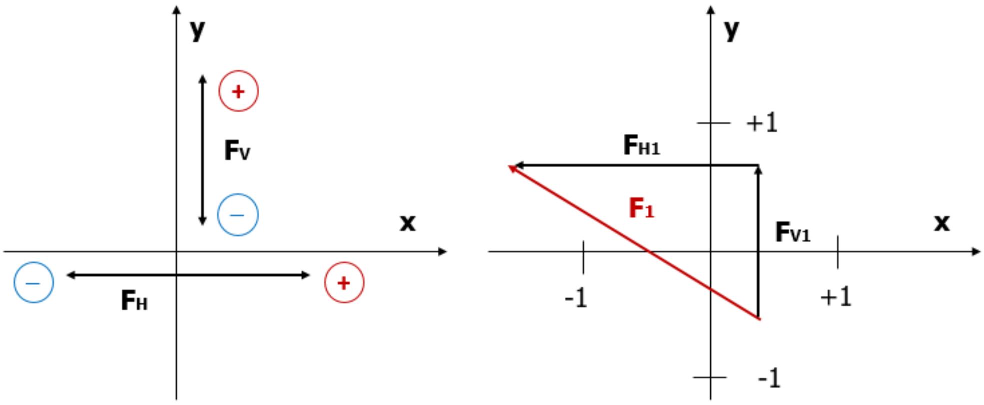


Abbildung 3: Vorzeichen von Kräften

Zeigen die Kräfte in die positive Achsenrichtung, sind sie mit einem positiven Vorzeichen zu versehen. Zeigen die Kräfte entgegen der Achsenrichtung, bekommen sie ein negatives Vorzeichen.
Bezogen auf die eingezeichnete Kraft F_1 in Abbildung 3 bedeutet dies, dass die vertikale Komponente F_{V1} ein positives Vorzeichen erhalten muss und die horizontale Komponente F_{H1} ein Negatives.

5.4 Reaktionskräfte

Die Reaktionskräfte wurden bereits kurz durch das 3. Newtonsche Axiom (s. Kapitel 5.2) angeschnitten, sollen hier aber nochmals genauer betrachtet werden.

Reaktionskräfte sind Zwangskräfte, die durch andere Kräfte hervorgerufen werden. Das Prinzip „actio = reactio" verdeutlicht Abbildung 4.

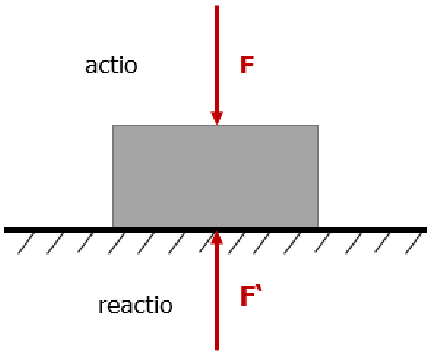


Abbildung 4: Reaktionskräfte

An den oben abgebildeten Körper greift aktiv die Kraft F an. Durch die passiven Reaktionskräfte der Unterlage $F`$ wird der Körper mit der Aktionskraft im Gleichgewicht gehalten. Voraussetzung für die Reaktionskraft ist immer das Vorhandensein einer Aktionskraft, da die Reaktionskraft auf diese reagiert.

Die Reaktionskraft ist in Bezug auf die Aktionskraft gleich groß, ihr entgegengerichtet und liegt auf derselben Wirkungslinie.

$$-F = F`$$

5.5 Kräftesysteme

An einem Körper können verschiedene Kräfte angreifen. Liegen die Wirkungslinien der Kräfte alle in einer gemeinsamen Ebene, spricht man von einem **ebenen Kräftesystem**. Wenn dies der Fall ist, muss die Gesamtwirkung der Kräfte auf den Körper ermittelt werden.

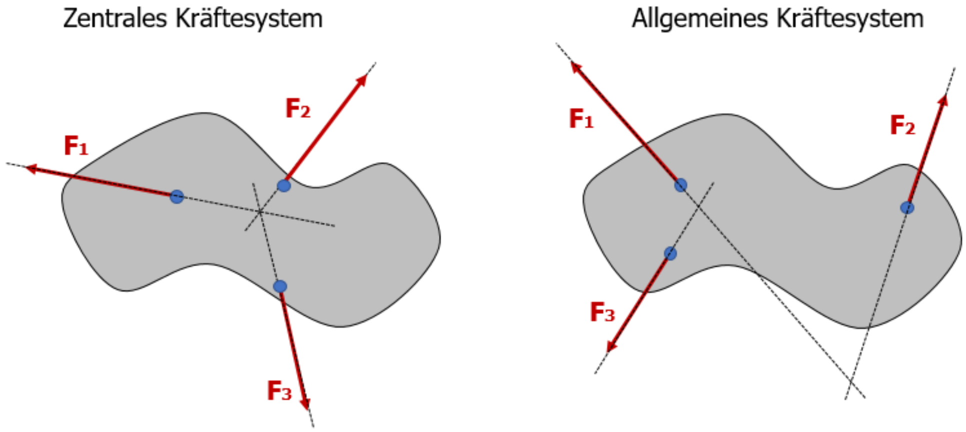


Abbildung 5: Kräftesysteme
(angelehnt an Böge, A. 1990 S. 21)

5.5.1. Zentrales Kräftesystem

In einem zentralen Kräftesystem schneiden sich alle Wirkungslinien der Einzelkräfte in einem Punkt (s. Abbildung 5, Bild 1). Der Körper kann hierdurch nur verschoben werden, nicht aber gedreht.

5.5.2. Allgemeines Kräftesystem

In einem allgemeinen Kräftesystem (s. Abbildung 5, Bild 2) schneiden sich, im Gegensatz zum zentralen Kräftesystem, die Wirkungslinien aller Einzelkräfte nicht mehr in einem Punkt. Der Körper kann hierdurch verschoben und gedreht werden.

5.6 Zusammensetzung von Kräften

Die grundlegenden Verfahren zur Berechnung und Darstellung von Kräften stellen sozusagen das kleine Einmaleins zum Lösen von statischen Aufgaben dar. Zur Vereinfachung werden in der Mechanik hierbei sogenannte **starre Körper** betrachtet, bei denen man annimmt, dass sie nicht verformbar sind. Hierbei wird der reale Körper als System aus starr verbundenen Masseelementen betrachtet.

5.6.1 Kräfte auf einer Wirkungslinie

In Abbildung 6 ist ein wichtiger Sachverhalt dargestellt: Greift die Kraft von links an den Körper an, so wird der Gegenstand nach rechts verschoben. Wird die Kraft auf ihrer Wirkungslinie nach rechts verschoben, so zieht sie an dem Körper und er verschiebt sich wieder um den gleichen Betrag nach rechts. Würden mehrere Kräfte an dem Körper auf der gleichen Wirkungslinie angreifen, könnten diese ganz einfach je nach Richtung zu einer einzigen Kraft addiert oder subtrahiert werden.

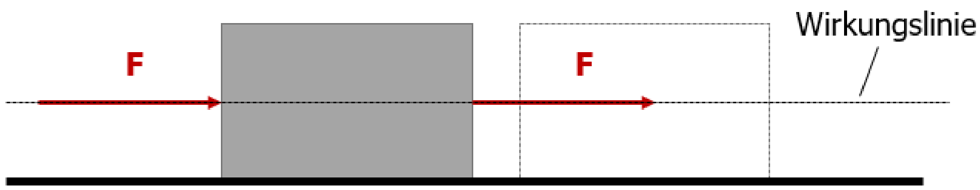


Abbildung 6: Kräfte auf einer Wirkungslinie

Entlang ihrer Wirkungslinie dürfen Kräfte beliebig am starren Körper verschoben werden. Hierdurch findet keine Änderung der Kraftwirkung statt.

5.6.2. Die Resultierende

Da Kräfte Vektoren sind (s. Kapitel 5.1), können diese nicht einfach addiert werden. Mehrere Einzelkräfte können durch ihre sogenannte **Resultierende** F_{res} zusammengefasst werden. Diese hat dieselbe Wirkung auf den Körper wie die Einzelkräfte, aus denen sie zusammengesetzt ist.

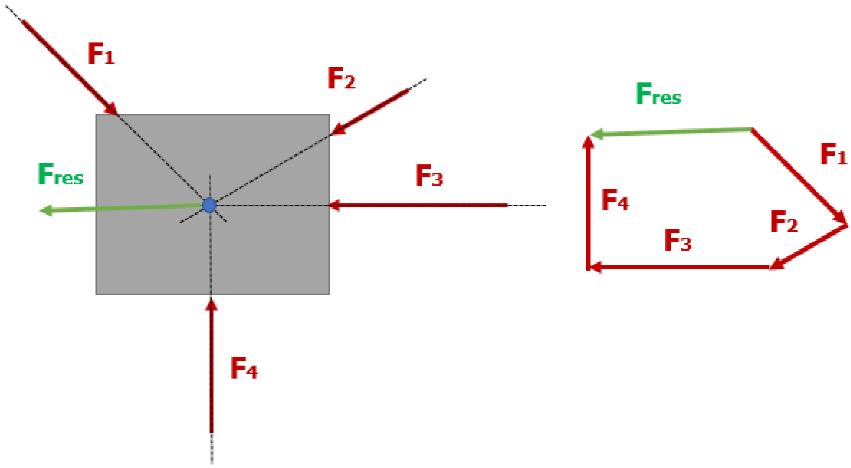


Abbildung 7: Die Resultierende
(angelehnt an Müller, K. & Alles, O. H. 2003, S. 23)

Die angreifenden Kräfte liegen in dem zentralen Kräftesystem (s. Kapitel 5.5 Kräftesysteme) in Abbildung 7 nicht alle auf einer Wirkungslinie. Die resultierende Kraft kann trotzdem einfach durch die grafische Aneinanderreihung der Einzelkräfte ermittelt werden, da alle Kräfte an einem Punkt angreifen. Man bezeichnet diese grafische Darstellung als **Kräfteplan**:

- Der Anfangspunkt der Kraft F_1 wird mit dem Endpunkt der Kraft F_2 verbunden
- Der Anfangspunkt der Kraft F_2 wird wiederrum mit dem Endpunkt der Kraft F_3 verbunden
- Dieses Prinzip wird fortgesetzt bis alle Kräfte aneinandergereiht sind

Die Resultierende ist dann die Verbindung des Anfangspunktes der ersten Kraft mit dem Endpunkt der zuletzt aufgezeichneten Kraft. Durch Parallelverschiebung kann die Resultierende aus dem Kräfteplan auf den zu untersuchenden Körper übertragen werden. Die Wirkungslinie geht durch den Schnittpunkt der Einzelkräfte.

Die resultierende Kraft F_{Res} entsteht durch die beliebige Aneinanderreihung der Einzelkräfte und zeigt immer entgegen der Umfahrungsrichtung der grafisch zusammengesetzten Kräfte. Sie ist eine gedachte Ersatzkraft für die am Köper angreifenden Einzelkräfte. Voraussetzung ist, dass es sich um ein zentrales Kräftesystem handelt.

Blatt 5-2: Kräfteaddition

5.7 Zerlegung von Kräften

In der TM kann die Wirkung einer Einzelkraft oder einer Resultierenden zwar viel einfacher untersucht werden, aber trotzdem ist es für die Lösung mancher Aufgaben wichtig, die Resultierende wieder in ihre Komponenten zu zerlegen. Das soll an einem Beispiel verdeutlicht werden. Auf den unten abgebildeten Körper (s. Abbildung 8) wirkt eine schräge Kraft F.

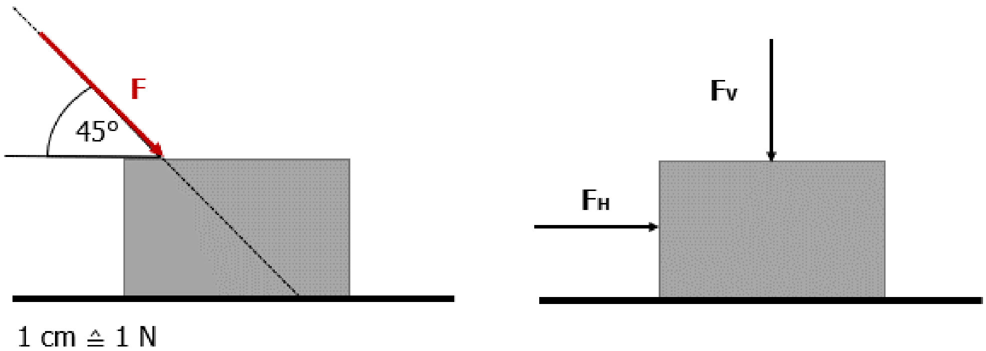


Abbildung 8: Zerlegung von Kräften

Zum einen führt diese Kraft zu einer Verschiebung des Körpers nach rechts, zum anderen drückt sie den Körper nach unten. Wollen wir nun nur die Verschiebung nach rechts ermitteln, so hängt diese von dem Neigungswinkel der Kraft ab.
Die Kraft F muss also zunächst in ihre horizontale Komponente F_H und vertikale Komponente F_V zerlegt werden. Aus der horizontalen Komponente ergibt sich dann wie stark der Körper nach rechts verschoben wird. Die vertikale Komponente spiegelt die Kraft in Richtung Boden wieder.

Die Kraftkomponenten können entweder geometrisch oder analytisch bestimmt werden.

5.7.1. Geometrische Zerlegung von Kräften

Die geometrische Zerlegung der Kraft ist recht einfach:

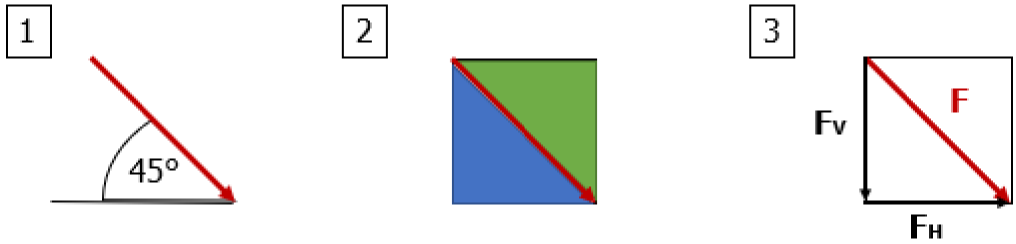


Abbildung 9: Geometrische Zerlegung von Kräften (1 cm ≙ 1 N)

1. Zuerst wird die Kraft maßstäblich und in dem richtigen Winkel, also parallel, aufgezeichnet.
2. Nun zeichnet man durch den Anfangs- und Endpunkt jeweils eine horizontale und eine vertikale Linie. Das Ergebnis sind zwei sogenannte **Kraftecke** (grün und blau dargestellt). Die zwei Kraftecke bilden ein **Kräfteparallelogramm**, in diesem Fall ein Rechteck.
3. Daraus können nun die horizontale und die vertikale Komponente herausgelesen werden. Beide Kraftecke können hierfür verwendet werden.

Auf das obige Beispiel bezogen bedeutet dies, dass die Kraft in horizontaler Richtung nun direkt aus dem Krafteck abgemessen werden kann. Mit Hilfe eines einfachen Dreisatzes ergibt sich für die Kraft $F_{\mathrm{H}} \approx 1{,}8\ \mathrm{N}$.

5.7.2. Analytische Zerlegung

Bei der analytischen Lösung sind mathematische Grundkenntnisse über die Winkelfunktionen gefragt.

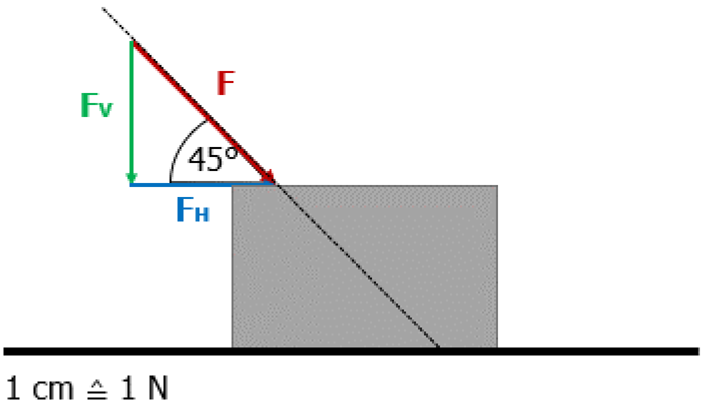


Abbildung 10: Analytischer Zerlegung von Kräften

Die vertikale Kraftkomponente stellt in diesem Fall die Gegenkathete und die Horizontale die Ankathete dar. Mit dem vorgegebenen Maßstab hat die Kraft einen Betrag von $2{,}5\ \mathrm{N}$. Mittels den Winkelsätzen ergibt sich für den Betrag der Kräftekomponenten:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{F_v}{F} \qquad / \ (\cdot F)$$

$$F_v = \sin(\alpha) \cdot F = \sin(45) \cdot 2{,}5\ \mathrm{N} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2{,}5\ \mathrm{N} = \mathbf{1{,}8\ N}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{F_H}{F} \qquad / \ (\cdot F)$$

$$F_H = \cos(\alpha) \cdot F = \cos(45) \cdot 2{,}5\ \mathrm{N} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2{,}5\ \mathrm{N} = \mathbf{1{,}8\ N}$$

In diesem Fall haben beide Komponenten der Kraft den gleichen Wert, was bei einem anderen Winkel natürlich nicht der Fall wäre. Da die Summe der Winkel in einem Dreieck immer 180° ergibt und es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, muss der 3. Winkel auch 45° (180° - 90° - 45°) betragen. Mit welchem der beiden Winkel man rechnet spielt keine Rolle.

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras lässt sich das Ergebnis überprüfen:

$$F_H^2 + F_V^2 = F^2$$

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$$

$$\mathrm{F} = \sqrt{(1{,}8\ \mathrm{N})^2 + (1{,}8\ \mathrm{N})^2} \approx \mathbf{2{,}5\ N}$$

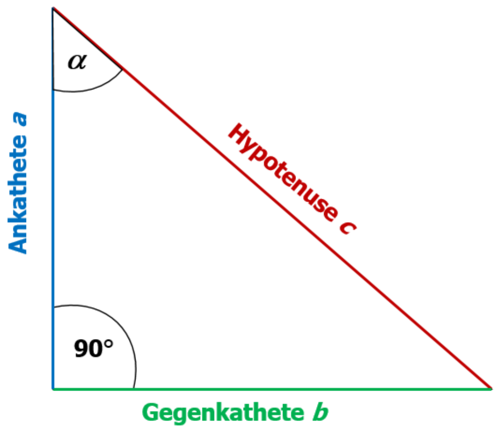
In der TM ist meist von Interesse, eine Kraft so zu zerlegen, dass ihre Wirkungslinien dem Koordinatensystem entsprechen. Theoretisch gäbe es aber unendlich viele Lösungen bei der Zerlegung einer Kraft.

Winkelfunktionen

Es gibt drei Winkelfunktionen, den Sinus, Kosinus und Tangens. Diese beschreiben das Verhältnis eines spitzen Winkels in Abhängigkeit von der Seitenlänge. Die Winkelfunktionen gelten lediglich in einem rechtwinkligen Dreieck. Nur mit Hilfe eines bekannten Winkels und einer Seitenlänge können so die restlichen Werte des Dreiecks berechnet werden.

Satz des Pythagoras

$a^2 + b^2 = c^2$

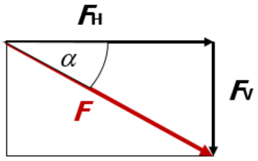


$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete } b}{\text{Hypotenuse } c}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete } a}{\text{Hypotenuse } c}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete } b}{\text{Ankathete } a}$$

Jede Kraft kann geometrisch und analytisch in zwei Komponenten zerlegt werden.



$$F_{\mathrm{H}} = F \cdot \cos(\alpha)$$

$$F_{\mathrm{v}} = F \cdot \sin(\alpha)$$

Blatt 5-3: Wie zerlegt man eine Kraft?

5.8 Lasten

Die Gewichtskräfte von Bauteilen und die Gewichtskräfte, die von außen auf das Bauteil wirken, bezeichnet man als Lasten. Da das Eigengewicht von Bauteilen immer vorhanden ist, nennt man dieses eine **ständige Last**. Belastungen durch Personen oder zum Beispiel durch Schnee sind jedoch nicht immer vorhanden und werden daher als **Verkehrslast** (nicht ständige Lasten) bezeichnet. Man unterscheidet:

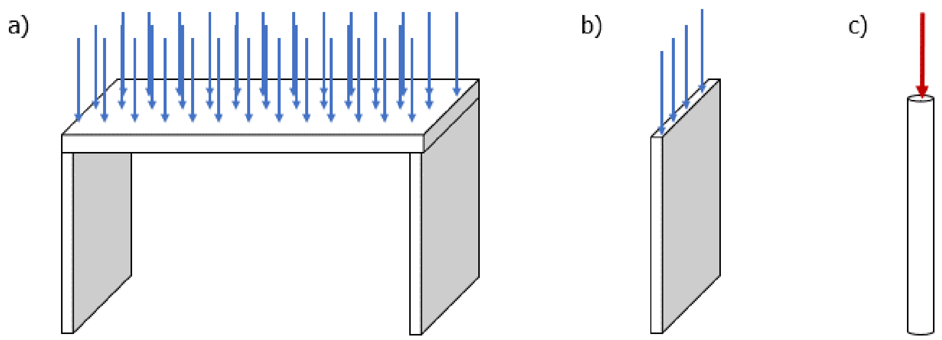


Abbildung 11: Lasten

a) **Flächenlasten** $[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}]$

   Beispiel für Flächenlasten sind die Eigenlasten einer Decke oder eine Schneebedeckung. Die Einheit N der Kraft wird in diesem Fall auf eine Fläche bezogen.

b) **Linienlasten** $[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}]$

   Eine Linienlast entsteht, wenn eine Flächenlast zum Beispiel auf eine Wand weitergegeben wird.

c) **Punktlasten** $[\mathrm{N}]$

   Wird eine Linienlast zum Beispiel auf eine Stütze weitergegeben, spricht man von einer punktuellen Belastung der Stütze.

Bei Flächen- und Linienlasten kann zudem eine gleichmäßige und ungleichmäßige Verteilung vorliegen.

Wenn man mit Bauteilen rechnet, die durch eine Flächenlast belastet sind, ist es einfacher, diese zunächst auf eine einzelne Kraft - die Resultierende - zu reduzieren. Das nachfolgende Beispiel soll dies verdeutlichen.

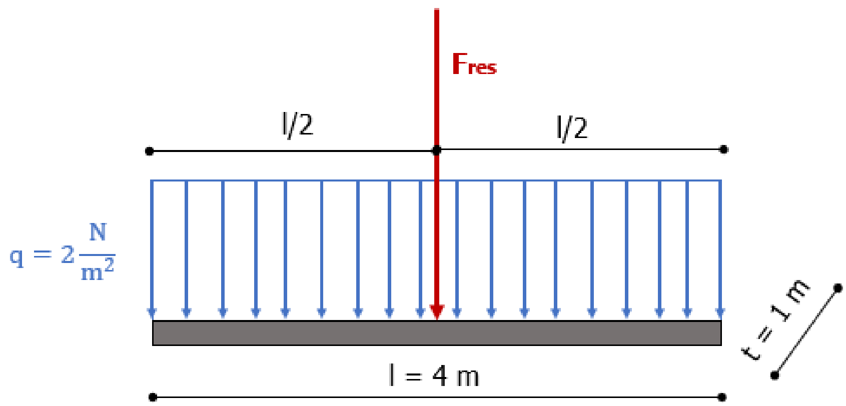


Abbildung 12: Flächenlast

In Abbildung 12 wird ein Balken durch die Flächenlast q belastet. Um die resultierende Kraft zu ermitteln, benötigt man zunächst die Fläche der Last. Da es sich um ein Rechteck handelt lässt sich die Querschnittsfläche mit der Formel

$$A = l \cdot t = 4\ \mathrm{m}\ \cdot 1\ \mathrm{m} = 4\ \mathrm{m}^2$$

berechnen. Auf jeden Quadratmeter wirkt die Kraft $2\ \mathrm{N}$, daher beträgt die gesamte Belastung auf den Balken:

$$F_{\mathrm{res}} = A\ \cdot q = 4\ \mathrm{m}^2 \cdot 2\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 8\ \mathrm{N}$$

Die Resultierende greift, da es sich um eine gleichmäßige Belastung handelt, in der Mitte des Balkens an.

Exkurs: Brücken verbinden

Aufbau einer Brücke

Die **Brücke** ist ein Bauwerk zum Führen von Verkehrswegen (Straße, Eisenbahn, Kanal) oder baulichen Anlagen über natürliche (z.B. Gewässer, Schluchten) oder künstliche (z.B. Autobahnen) Hindernisse.

Eine Brücke setzt sich aus verschiedenen Bauteilen zusammen:

Träger: Der Träger dient zur Überquerung der Brücke, z. B. für Autos, Eisenbahnen oder Fußgänger. In der Regel ist der Träger ein großer Balken, der die Kräfte aufnimmt und als Druckkräfte zu den Stützen leitet.

Seile: Bestimmte Brückenarten sind aus Seilen aufgebaut, an denen die Fahrbahnhänger befestigt sind. Die Seile werden über Pylone geführt.

Über-/Unterbau: So gut wie alle Brücken haben einen Über- und Unterbau. Der Überbau wird über der Fahrbahn gebaut, der Unterbau liegt unterhalb der Fahrbahn. Beide unterstützen die Kräfteübertragung.

Lager: Am Anfang und Ende einer Brücke wird diese durch Lager gesichert. Auch Auflagerflächen, die Gewichte tragen, werden durch Lager miteinander verbunden. Diese schränken bestimmte Bewegungen der Brücke ein und leiten auftretende Kräfte in den Untergrund weiter. Loslager ermöglichen es einer Konstruktion, sich bei einem Temperaturanstieg auszudehnen.

Widerlager: Diese liegen an den Enden der Brücke und verhindern ein Wegrutschen.

Stützen: Die Stützen nehmen die Druckkraft des Trägers auf und leiten sie zum Boden ab.

Pylone: Pylone sind eine besondere Art an Stützen, die beispielsweise die Seile bei einer Hängebrücke halten.

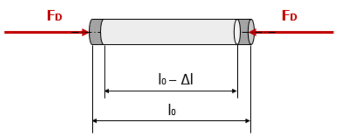
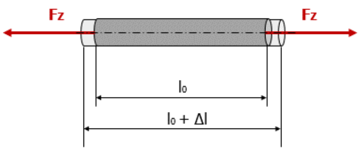
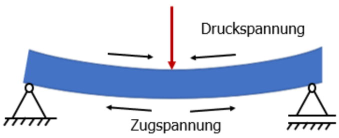
Hänger: Die Hänger verbinden die Fahrbahn mit den Seilen. Sie können je nach Belastung der Brücke schräg oder senkrecht angebracht werden.

Kräftewirkung auf eine Brücke

Bei einer Belastung der Brücke spielen immer Kräfte eine große Rolle. Diese müssen unbedingt sicher in den Untergrund abgeleitet werden, um eine zu starke Belastung der Brücke zu verhindern. Dass die Brücke im Gleichgewicht steht und nicht bricht, ist die Aufgabe der Statik, der Lehre vom Gleichgewicht.

Auf eine Brücke können folgende Kräfte wirken:

Tabelle 9: Kräfte an einer Brücke

Druckkraft	Zugkraft	Biegung
Drücken die äußeren Kräfte in Richtung der Stabachse, spricht man von einer Druckbeanspruchung. Die Folge ist eine Verkürzung des Körpers. In allen Bauwerken werden Bauteile auf Druck beansprucht. Beispiele dafür sind Säulen und Druckstäbe. Ihre Aufgabe ist es, die Lasten der über ihnen liegenden Bauteile aufzunehmen und sie in den Untergrund zu leiten.	Ziehen die äußeren Kräfte in Richtung der Bauteilachse, so spricht man von einer Zugbeanspruchung des Bauteils. Die Folge ist eine Verlängerung (Dehnung) des Körpers. Seile können zum Beispiel nur Zugkräfte aufnehmen und übertragen. Die Zugkräfte wirken dabei immer in Seilrichtung.	Fahren Autos über die Brücke, kann es sein, dass sich der Träger der Brücke biegt. Die Folge ist eine Verlängerung des unteren Trägerrandes und eine gleichzeitige Verkürzung des oberen Trägerrandes. Bei einer Biegung treten sowohl Zug-, als auch Druckkräfte auf, die zu einer Spannung im Bauteil führen.
		

Brückenarten

Die Einteilung von Brücken kann nach unterschiedlichen Kriterien erfolgen. Die beste Variante ist die Typologie nach Form und Konstruktion. Man kann dann noch weiter nach Material und Gewicht differenzieren.

1. Balkenbrücken

Abbildung 13: Moderne Balkenbrücke

Die einfachste und älteste Brücke ist die Balkenbrücke. Das äußere Kennzeichen der Balkenbrücke ist üblicherweise die sichtbare Trennung des Überbaus (Brückenträger) vom Unterbau (Stützen, Widerlager) durch Lager. Die Lager übertragen die Lasten aus dem Überbau auf die Unterbauten und geben dem Brückenträger die notwendige Lagesicherheit und Bewegungsmöglichkeit. Die Balkenbrücke ist vor allem wegen ihrer vergleichsweise einfachen Fertigung eine häufige Bauform von Brücken. Die Querschnittsform in Längsrichtung entspricht äußerlich einem Balken, meist ist die Trägerhöhe konstant. Der Balken nutzt die Biegesteifigkeit des Querschnittes und Werkstoffes optimal aus und wird bei üblichen Brücken mit kleinen bis mittleren Stützweiten (ca. 80 m) als statisches System verwendet. Es treten jedoch relativ große Zug- und Druckkräfte auf, wodurch man bezüglich der Spannweiten schnell an seine Grenzen stößt.

Die Spannweite (auch Stützweite) bezeichnet in der Baustatik den Abstand zwischen zwei Auflager- bzw. Aufhängepunkte eines Tragwerks. Sie kann mit einem präzisen Längenmaß angegeben werden, das in der Tragwerksplanung als fixes Objekt, d. h. ohne Ausdehnung, verwendet wird.

2. Bogenbrücken

Abbildung 14: Bogenbrücke

Die Bogenbrücke stellt im Vergleich zur Balkenbrücke einen Fortschritt im Brückenbau dar. Ein Bogen ist für Massivbaustoffe, wie Stein oder Beton, mit ihrer hohen Druckfestigkeit die geeignetste Tragwerksart, da er bei optimaler Geometrie fast nur Druckspannungen aufweist. Aus diesem Grund ist diese Art der Konstruktion bei vielen alten Brücken zu sehen. Allerdings muss der Baugrund ausreichend fest sein, um den Bogenschub aufnehmen zu können.

Heute werden Bogenbrücken mit aufgeständerter Fahrbahn bei tiefen Tälern oder Einschnitten gebaut. Mit einem Stahlbogen sind Stützweiten von bis zu 500 m möglich, bei einem Stahlbetonbogen bis zu 300 m. Bogenbrücken mit angehängter Fahrbahn kommen aufgrund der kleinen Bauhöhe der Fahrbahntafel vor allem im Flachland bei der Überwindung von Gewässern vor. Bogenbrücken mit mittenliegender Fahrbahn, wie beispielsweise bei der Karmsundbrua in Norwegen, sind eine weitere Variante. Diese Bogenbrücke verbindet die Insel Karmøy mit dem Festland und spannt sich insgesamt 691 Meter über die Meeresstrasse Karmsund, mit einer maximalen Spannweite von 184 Metern zwischen zwei Auflagerpunkten in Brückenlängsrichtung.

3. Hängebrücken

Abbildung 15: Hängebrücken

Die Hängebrücke wird überwiegend bei der Überbrückung breiterer schiffbarer Gewässer mit Stützweiten oberhalb von 800 m gebaut. Beispielsweise im Himalaya können so riesige Schluchten überbückt werden. Sie ist statisch ähnlich der Bogenbrücke mit untenliegender Fahrbahn. Wegen der Tendenz zu größeren Verformungen wird sie im Regelfall nicht als Eisenbahnbrücke verwendet.

4. Schrägseilbrücke

Abbildung 16: Schrägseilbrücke

Bei einer besonderen Form der Hängebrücke werden zwischen Pylonen Tragseile gespannt, welche die Fahrbahn tragen.

Die Schrägseilbrücke hat sich zur Überbrückung breiterer Gewässer oder Flächen mit Stützweiten zwischen 200 m und 1.000 m als technisch besonders geeignet und auch als wirtschaftlich erwiesen. Alle lotrechten Kräfte der Brücke werden von den Zugstäben aufgenommen und über die Seile in den Pylon eingebracht, der diese dann senkrecht als reine Druckkräfte in den Untergrund einbringt. Die Schrägseilbrücke entspricht einer Auslegerbrücke, bei der die Fahrbahntafel den druckbeanspruchten Untergurt bildet. Die Seile sind hier Auslegerzuggurte, welche die vertikalen Lasten an die Pylone abtragen und in der Fahrbahntafel rückverankert sind. Sie sind kostengünstiger als Hängebrücken, erreichen dabei jedoch nur halb so große Spannweiten.

5. Fachwerkbrücke

Abbildung 17: Fachwerkbrücke

Fachwerke sind aufgelöste Tragwerksstrukturen. Diese weisen den Vorteil auf, dass sie einen geringeren Materialverbrauch haben als vergleichbare vollwandige Tragwerke wie Balken. Dementsprechend haben sie ein geringeres Eigengewicht. Die Stäbe des Fachwerks werden hier vorwiegend auf Zug und Druck belastet. Von Nachteil ist die meist größere Bauhöhe der Konstruktion. Fachwerkbrücken werden vor allem mit Stahl, aber auch mit Holz ausgeführt. Aufgrund der hohen Verkehrslasten werden sie oft bei Eisenbahnüberführungen gebaut, finden aber auch ihre Anwendung bei Straßenbrücken mit größeren Stützweiten, insbesondere in den USA. Ein berühmtes deutsches Beispiel einer großen Fachwerkbrücke, die ohne Strompfeiler auskommt, ist das 1893 fertig gestellte Blaue Wunder in Dresden (s. Abbildung 17), konstruktiv ausgebildet als Auslegerbrücke.

Fachwerkstypologien

Je nach Beanspruchungsart kommen verschiedene Fachwerkstypen zum Einsatz. Die nachfolgende Abbildung zeigt einige Fachwerkstypen auf, die insbesondere im Brückenbau eingesetzt werden. Die Fachwerkstypen werden häufig noch mit zusätzlichen Stützen versehen.

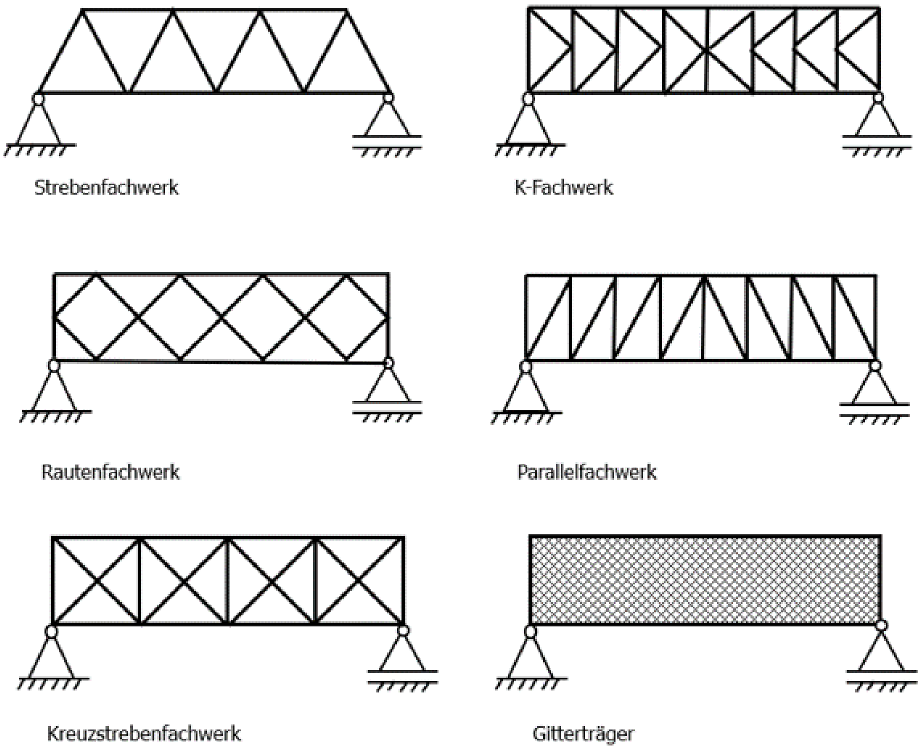


Abbildung 18: Fachwerkstypen

(angelehnt an Vorlesung Baukonstruktion)

Exkurs: Brücken verbinden I-V

6. Drehmomente

Bereits vor über 2500 Jahren bauten die Römer und Griechen riesige Bauwerke mit einer Genauigkeit, die heutige Ingenieure stutzen lässt. Ein Steinblock wog dabei mehrere einhundert Kilo und musste vom Boden bis auf 50 Meter Höhe transportiert werden und das alles ohne moderne Maschinen! Heute stellt man sich die Frage, wie so eine Meisterleistung möglich war.

Abbildung 19: Antiker Kran
(https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Trispastos_scheme.svg; Eric Gaba / CC BY-SA)

Betrachtet man die Abbildung 19, so erkennt man, dass die Baumeister mit einer Art Kran arbeiteten. Die Idee dahinter ist genial und das Prinzip recht einfach umzusetzen: ein Flaschenzug und eine Übersetzung über einen Hebel verzehnfachen die aufgewendete Kraft. Ein weiteres Beispiel soll das Prinzip des Hebels nochmals verdeutlichen:

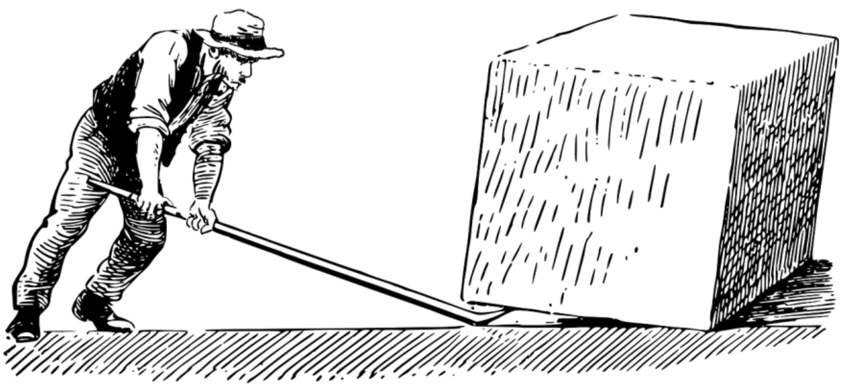


Abbildung 20: Das Hebelgesetz am Beispiel des zweiarmigen Hebels

Obwohl der Steinblock viel schwerer als der Arbeiter ist, kann er ihn mit seinem Körpergewicht anheben. Da der Arbeiter an der Langen Seite seines Stabes nach unten drückt, ist der Hebelarm viel größer als der unter dem Steinblock, was offensichtlich das fehlende Gewicht ausgleicht.

6.1 Hebelgesetz/ Zweiarmiger Hebel

„Zeigt mir den Stützpunkt und ich hebe die Welt aus den Angeln": bereits Archimedes, ein griechischer Mathematiker, behauptete vor über 2000 Jahren, dass sich theoretisch jeder Gegenstand mit einer geringen Kraft anheben lässt, wenn nur der Hebelarm lang genug ist.

Ein Hebel stellt ein System zur Kraftübertragung dar. Er ist um eine feste Achse drehbar gelagert. Die Wippe ist ein anschauliches Beispiel für einen zweiseitigen Hebel. Man unterscheidet dabei die folgenden Größen:

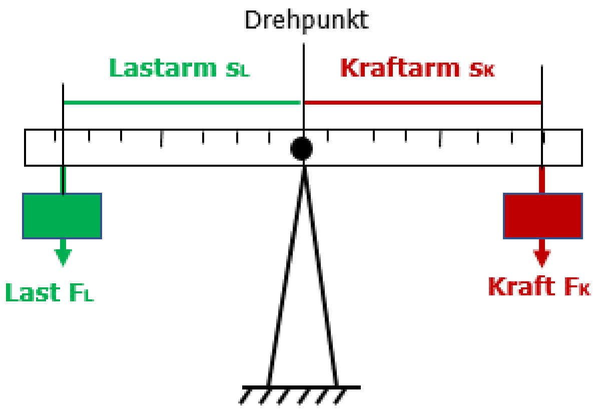


Abbildung 21: Zweiseitiger Hebel

(angelehnt an https://www.zum.de/dwu/depot/pme200f.gif)

Der zweiseitige Hebel besteht aus einem Lastarm s_L, an dem eine Last F_L angebracht ist und einem Kraftarm s_K, an dem die nötige Kraft F_K aufgebracht werden muss, um die Last zu überwinden.

Das Hebelgesetz

Am zweiseitigen Hebel herrscht Gleichgewicht, wenn an beiden Seiten das Produkt aus Kraft und dem zugehörigen Hebelarm gleich ist:

$$s_L \cdot F_L = s_K \cdot F_K$$

Allerdings gilt dies nur, wenn die Kräfte im rechten Winkel zum Hebelarm wirken.

6.2 Kräftepaar und Drehmoment

Greifen zwei gleichgroße, parallele und entgegengerichtete Kräfte an einem Körper an, so nennt man diese ein Kräftepaar. Da sich der Körper dadurch verdreht, bezeichnet man dieses Kräftepaar auch als Drehmoment. Da sich die Wirkungslinien nicht in einem Punkt schneiden, kann das Kräftepaar nicht auf eine resultierende Kraft reduziert werden.

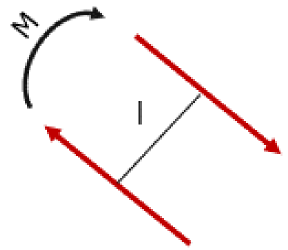


Abbildung 22: Kräftepaar rechtsdrehend
(angelehnt an Müller, K. & Alles, H. O. 2003, S. 42)

Ein Kräftepaar ist ein Moment. Ein Moment kann rechtsdrehend ↷ oder linksdrehend ↶ sein. Der positive Drehsinn muss vor dem Rechnen durch einen Pfeil über oder neben dem Symbol M (Moment) klar definiert werden:

- M↶: das linksdrehende Moment hat einen positiven Drehsinn
- M↷: das rechtsdrehende Moment hat einen positiven Drehsinn

Je nachdem, wie Kräfte an einem Körper angreifen, können sie zu einer Verschiebung oder Verdrehung des Körpers führen. Greift eine Kraft zum Beispiel am Umfang des in Abbildung 23 skizzierten Rades an, so dreht sich das Rad, sobald der Reibungswiderstand überwunden wird. Geht die Wirkungslinie der Kraft dagegen durch den Radmittelpunkt, wird das Rad nur nach rechts verschoben.

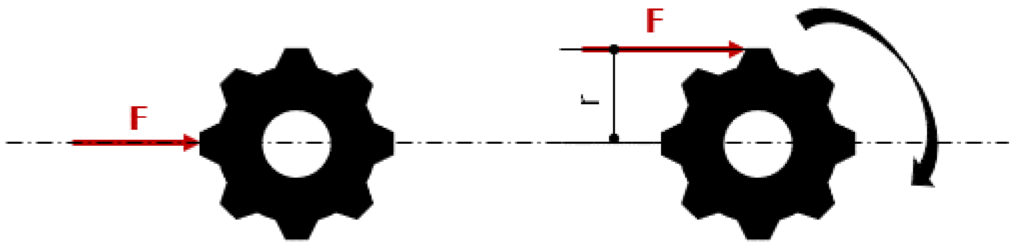


Abbildung 23: Drehmoment am Beispiel eines reibungsfreien Rades

Das Drehmoment berechnet sich als Produkt aus der wirkenden Kraft und dem Hebelarm senkrecht zur Wirklinie der Kraft.

$M = F \cdot l$	$M =$ Drehmoment $F =$ Kraft $l =$ Hebelarm (senkrechter Abstand vom Bezugspunkt zur Wirkungslinie der Kraft)

Auf den zweiseitigen Hebel bezogen bedeutet dies:

Am zweiseitigen Hebel herrscht Gleichgewicht, wenn die Summe der links- und rechtsdrehenden Momente gleich ist. Die Gesamtsumme der Momente muss also null sein.

Blatt 6-1: Wie wirkt ein Hebel?

Blatt 6-2: Mit einem Hebel die Welt anheben

6.3 Einarmiger Hebel

Bei einem einarmigen oder auch einseitig genannten Hebel liegt der Drehpunkt am Hebelrand. Alle angreifenden Kräfte liegen somit auf der Seite des Hebels. Damit ein Gleichgewicht herrscht, müssen die wirkenden Kräfte in entgegengesetzter Richtung zeigen.

An einem einarmigen Hebel wirken Kraft und Last auf der gleichen Seite des Hebels.

Der einseitige Hebel wird oft im Alltag benutzt. Beispiele hierfür stellen zum Beispiel ein Nussknacker, die Handbremse oder eine Schubkarre dar. Wichtig ist auch hier, dass der Hebelarm immer den senkrechten Abstand des Drehpunktes zu der Wirkungslinie der Kraft darstellt. Das soll in Abbildung 24 noch einmal am Beispiel eines Schraubenschlüssels verdeutlicht werden.

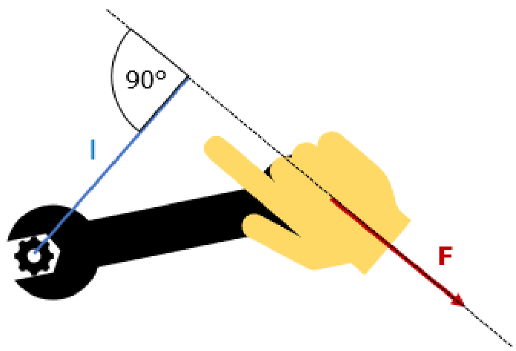


Abbildung 24: Hebelarm am Beispiel eines Schraubenschlüssels
(angelehnt an: https://www.leifiphysik.de/mechanik/drehbewegungen/drehmoment)

Durch die Verwendung des Schraubenschlüssels benötigt man weniger Kraft, um die Schraube festzudrehen, da die Kraft am Handgriff deutlich größer ist, als die Kraft an der Schraube.

Hebel im menschlichen Körper

Auch der Unterkiefer des Menschen stellt einen Hebel dar. Er ist durch das Kieferngelenk mit dem Schädel verbunden. Die Last stellt in diesem Fall die Nahrung dar, die zerkaut werden soll und die Kraft kommt durch den Kaumuskel zustande. Ebenso kann unser Arm durch die Zusammenarbeit von Bizeps und Trizeps als einseitiger Hebel hohe Lasten tragen.

Blatt 6-3: Hebel im menschlichen Körper

Blatt 6-4: Hebel in der Technischen Mechanik

Blatt 6-5: Eine rätselhafte Geschichte

Exkurs: Unterrichtseinheit „Kran"

Als exemplarische Unterrichtseinheit (UE), die im Rahmen des Fortbildungskonzepts für NwT entwickelt wurde (Autorenteam ZPG NwT), wird hier die UE „Kran elektrisch" empfohlen, da sie zum einen die Grundlagen der Statik und zum anderen die Anwendung des Hebelgesetzes aufgreift.

Die UE ist für die achte Klasse konzipiert worden und fokussiert die Konstruktion und Fertigung eines elektrisch angetriebenen Baukrans.

Link zur UE:

https://lehrerfortbildung-bw.de/u_matnatech/nwt/gym/bp2016/fb4/6_ue8/1_kran/

7. Statik

Die Statik ist ein Teilgebiet der Mechanik und umfasst die Lehre von den Gleichgewichtsgesetzen die unter Krafteinwirkung an ruhenden Körpern gelten. Der Begriff stammt aus dem lateinischen und bedeutet so viel wie „stehen". Hauptprägend ist hierbei der Zustand der Ruhe, der sich dadurch kennzeichnet, dass alle an einem Körper angreifenden Kräfte miteinander im Gleichgewicht stehen. Für Ingenieure sind weitreichende Kenntnisse in der Statik unerlässlich, denn schließlich sollen Gebäude, Türme oder Brücken exakt so bemessen werden, dass sie im Gleichgewicht bleiben und nicht einstürzen. Die Statik möchte also Wort wörtlich ihre Ruhe haben.

7.1 Freiheitsgrade eines Körpers

Die Bewegungsmöglichkeiten eines Körpers bezeichnet man als Freiheitsgrade. Hierzu zählen die Verschiebung (Translation) und die Drehung (Rotation). Die Freiheitsgrade sind in Abbildung 25 durch die schwarzen Pfeile symbolisiert. Die Verschiebung kommt durch eine Kraft zustande, bei einer Verdrehung muss ein Drehmoment wirken.

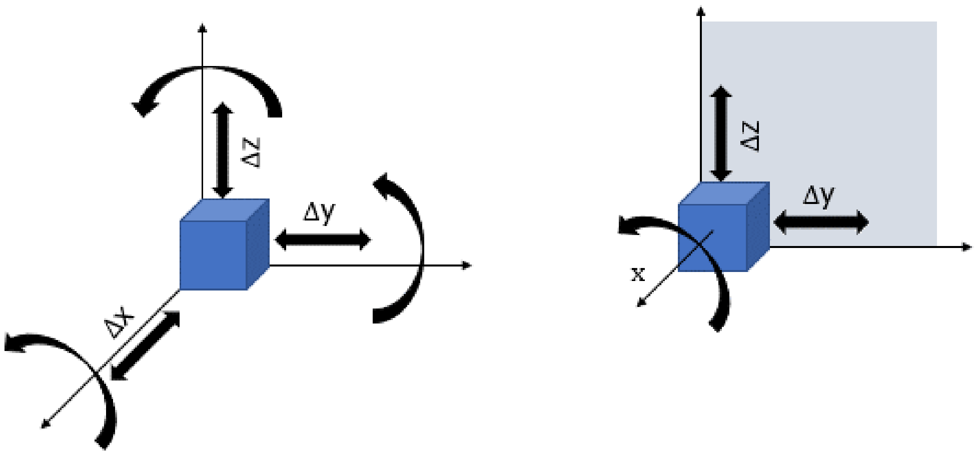


Abbildung 25: Freiheitsgrade eines Körpers im Raum (links) und in der Ebene (rechts)

Im Raum kann sich ein Körper entlang der drei Koordinatenachsen verschieben und sich zusätzlich um diese drehen. In der Ebene kann sich ein Körper entweder vertikal oder horizontal verschieben. Er kann sich aber nur um die Achse drehen, die senkrecht zu der Ebene steht. Wir betrachten im Folgenden nur Körper in einer Ebene. Ein Beispiel dafür wäre ein Klotz, der auf einem Tisch liegt.

Merke: Im Raum hat ein beweglicher Körper 6 Freiheitsgrade und in der Ebene 3.

7.2 Kräftegleichgewicht

Um den Zustand der Ruhe zu erlangen, kann mit Hilfe einer Gleichgewichtskraft F_{Gg} die Bewegung eines Körpers verhindert werden. Verschiebt die Resultierende also einen Körper um einen bestimmten Betrag, so muss die Gleichgewichtskraft diesen wieder in die Ausgangslage zurückverschieben. Die Gleichgewichtskraft hat also den gleichen Betrag wie die Resultierende und muss dieser auf ihrer Wirkungslinie genau entgegengerichtet sein.

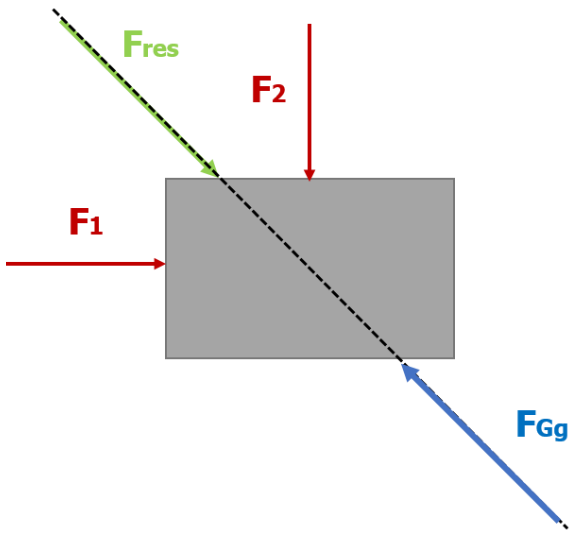


Abbildung 26: Gleichgewichtskraft

In Abbildung 26 könnte der Gleichgewichtszustand natürlich auch durch zwei Gleichgewichtskräfte, die der Kraft F_1 und F_2 entgegen gerichtet sind, aufrechterhalten werden.

Verglichen mit der Resultierenden hat die Gleichgewichtskraft nur eine andere Pfeilrichtung. Im Gleichgewichtszustand ist die Summe aller Kräfte Null. Der Körper verharrt in Ruhe.

7.3 Erste und zweite Gleichgewichtsbedingung

Betrachten wir nun den Kräfteplan genauer. Würde man annehmen, dass die oben erläuterte Gleichgewichtskraft eine wirkende Kraft auf den Körper darstellt, so würde sich der Kräfteplan schließen. Die Resultierende wäre also gleich null.

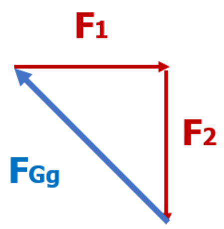


Abbildung 27: Kräfteplan mit Gleichgewichtskraft

Jede Kraft lässt sich, wie in Kapitel 5.7 erläutert, in ihre horizontale und vertikale Komponente zerlegen. Um die Gleichgewichtsbedingung zu erfüllen, muss sich auch der Kräfteplan der einzelnen Komponenten schließen.

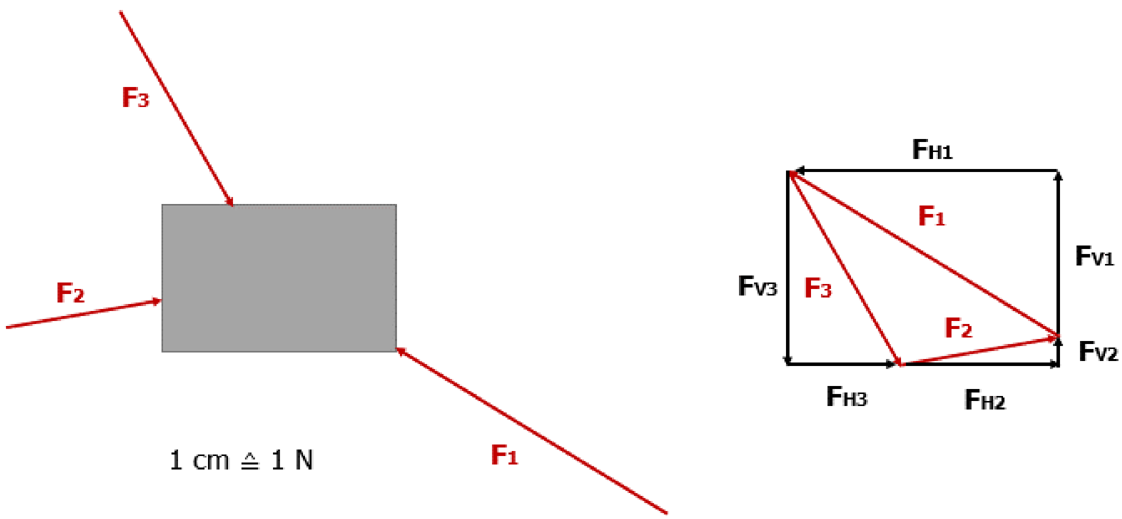


Abbildung 28: Erste und zweite Gleichgewichtsbedingung

(angelehnt an Müller, K. & Alles, H. O. 2003, S. 39)

Auf Abbildung 28 bezogen bedeutet dies rechnerisch:

$$\begin{aligned}\sum V &= F_{v1} + F_{v2} - F_{v3} \\ &= 0{,}7\ \mathrm{N} + 3{,}6\ \mathrm{N} - 4{,}3\ \mathrm{N} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum H &= -F_{H1} + F_{H2} + F_{H3} \\ &= -5{,}8\ \mathrm{N} + 3{,}4\ \mathrm{N} + 2{,}4\ \mathrm{N} \\ &= 0\end{aligned}$$

Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe, wenn die Summe aller vertikalen und die Summe aller horizontalen Kräfte null ist:

Erste Gleichgewichtsbedingung der Statik: $\sum V = 0$

Zweite Gleichgewichtsbedingung der Statik: $\sum H = 0$

Sigma in der Mathematik (∑)

Der griechische Großbuchstabe Sigma ∑ steht in diesem Fall für eine Summe, also die Addition mehrerer Zahlen.

Blatt 7-1: Immer mit der Ruhe …

7.4 Dritte Gleichgewichtsbedingung

Neben den beiden oben genannten Gleichgewichtsbedingungen ist noch eine dritte Bedingung notwendig, um ein endgültiges Gleichgewicht zu erreichen. Selbst wenn die ersten beiden Bedingungen erfüllt sind, muss der Körper noch nicht im Gleichgewicht sein, da noch eine Momentenwirkung (eine Verdrehung) stattfinden kann. Erst wenn auch diese unterbleibt, sind die Gleichgewichtsbedingungen der Statik erfüllt. In Abbildung 28 war diese Bedingung nicht nötig, da sich die Wirkungslinien aller angreifenden Kräfte in einem Punkt, dem Schwerpunkt, geschnitten haben. In Abbildung 29 müssen jedoch alle drei Gleichgewichtsbedingungen berücksichtigt werden.

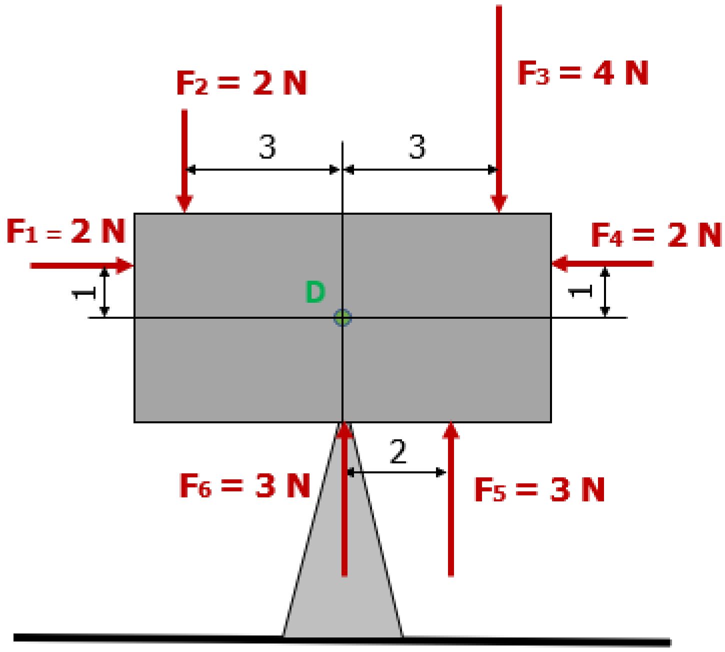


Abbildung 29: Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum H = F_1 - F_4 = 2\text{ N} - 2\text{ N} = 0$$

$$\sum V = -F_2 - F_3 + F_5 + F_6 = -2\text{ N} - 4\text{ N} + 3\text{ N} + 3\text{ N} = 0$$

$$\sum M_D \circlearrowleft + = -F_2 \cdot 3 + F_3 \cdot 3 - F_5 \cdot 2 + F_6 \cdot 0 + F_1 \cdot 1 - F_4 \cdot 1$$

$$= -2\text{ N} \cdot 3 + 4\text{ N} \cdot 3 - 3\text{ N} \cdot 2 + 0 + 1\text{ N} \cdot 1 - 1\text{ N} \cdot 1 = 0$$

Trotz der vielen angreifenden Kräfte und der wackeligen Lage bleibt der Klotz also im Gleichgewicht und fällt nicht von seiner Stütze.

Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe, wenn die Summe aller Momente null ist.
Dritte Gleichgewichtsbedingung der Statik: $\sum M = 0$

7.5 Lager

Die Hauptaufgabe der Statik ist es, unbekannte Kräfte, wie zum Beispiel Stützkräfte, die einen Körper im Gleichgewicht halten, zu berechnen. Hierzu gibt es sogenannte Lager.

Brücken liegen zum Beispiel nicht fest auf ihren Pfeilern, sondern werden durch ein Rollenlager befestigt. So kann sich die Brücke bei einer Ausdehnung trotzdem noch verschieben.

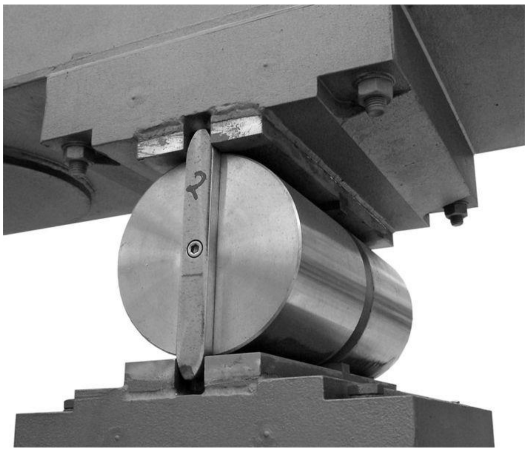
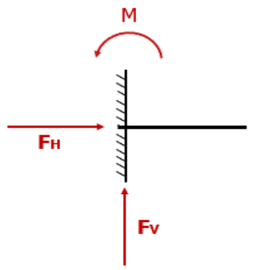
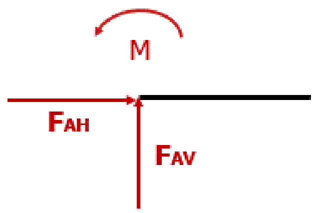
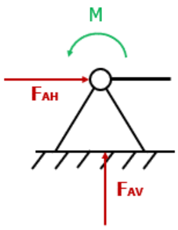
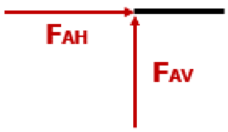
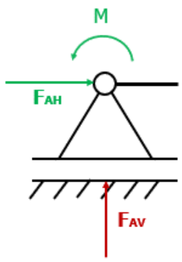
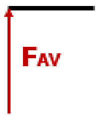


Abbildung 30: Rollenlager einer Brücke

(https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lager_01_KMJ.jpg; KMJ / CC BY-SA)

Lager verbinden ein Tragwerk mit der Umgebung. Mit Hilfe von Lagern können Kräfte und Bewegungen zwischen zwei sich relativ zueinander bewegenden oder ruhenden Lagerelementen übertragen werden. Es handelt sich also um Reaktionskräfte, da die Auflagerkräfte auf die Belastungen reagieren. Die drei wichtigsten Auflagerarten können Tabelle 10 entnommen werden. Die Reaktionskräfte sind rot markiert, die noch übrigen Freiheitsgrade des Körpers grün. In der Regel sind die Auflagerkräfte auf das Auflager gerichtet.

Tabelle 10: Auflagerarten (angelehnt an Skript TM, S. 7)

Auflagerart	Wertigkeit und Freischnitt	Beschreibung
Eingespannte Auflager 	Dreiwertig 	Es werden sowohl Kräfte in alle Richtungen, als auch Verdrehungen verhindert. Somit gibt es keine Bewegungsmöglichkeiten.
Feste Auflager (Festlager) 	Zweiwertig 	Es können Kräfte in alle Richtungen aufgenommen werden. Mögliche Bewegungen liegen nur noch in einer Verdrehung.
Bewegliche Auflager (Loslager) 	Einwertig 	Es kann nur eine senkrecht zur Auflagerfläche wirkende Kraft aufgenommen werden. In Richtung der Auflagerfläche ist eine Bewegung möglich.

Die Wertigkeit eines Lagers entspricht den übertragenen Kräften.

7.6 Freischneiden von Körpern

Das Freischneiden dient der besseren Übersicht von den Kräften, die an einem Körper angreifen. Es werden alle den Körper berührende Teile, wie Gelenke oder Lager, durch auf sie zurückzuführende Reaktionskräfte ersetzt. Es ist zudem hilfreich, alle Abmessungen einzuzeichnen.

Das einfachste Beispiel für eine Brücke stellt ein Einfeldträger mit einem Fest- und einem Loslager dar. Die einzige Kraft, die gerade auf die Brücke wirkt, ist ihre Gewichtskraft F_G. Würde beispielsweise zusätzlich ein Mensch auf der Brücke stehen, müsste dieser durch eine Kraft F im Freischnitt berücksichtigt werden.

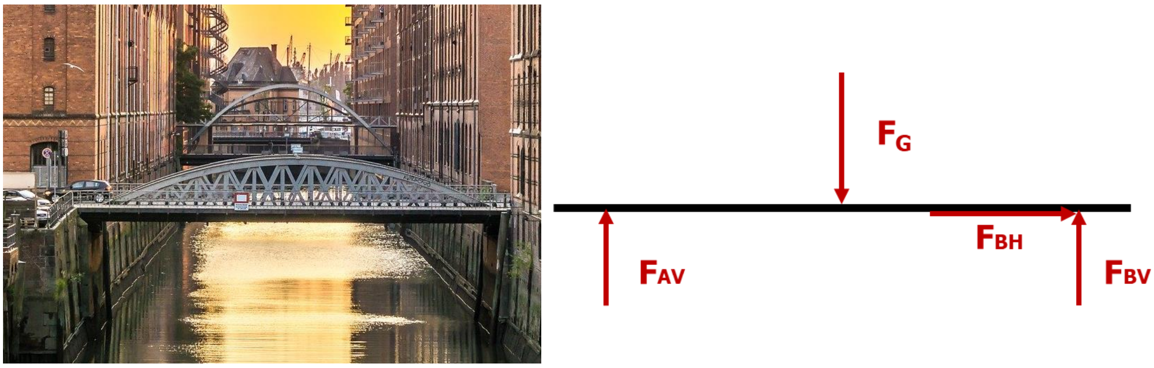


Abbildung 31: Freischneiden am Beispiel einer Brücke

Das korrekte Freischneiden ist die Voraussetzung für das Lösen der Statikaufgabe. Beachte beim Freischneiden daher folgendes:

1. Die Reaktionskräfte der Lagerungen werden alphabetisch mit einem Buchstaben versehen und, je nach Wertigkeit des Lagers, noch zusätzlich mit einem V für vertikal oder H für horizontal.
2. Es müssen nur Kräfte berücksichtigt werden, die auch am Körper angreifen.
3. Die angreifenden Kräfte werden mit Nummern durchnummeriert.
4. Alle Körper haben eine Masse, es sei denn, sie werden als massenlos bezeichnet.
5. Die Gewichtskraft greift immer im Schwerpunkt des Körpers an.

Blatt 7-3: Einfach kann ja jeder …

7.7 Statische Bestimmtheit

7.7.1. Statisch bestimmt

Ein Träger ist statisch bestimmt, wenn er mindestens dreiwertig gelagert ist. Somit werden alle möglichen Bewegungen (s. Kapitel 7.1) verhindert und es können die drei noch unbekannten Auflagergrößen mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden. Die Brücke ist also statisch bestimmt.

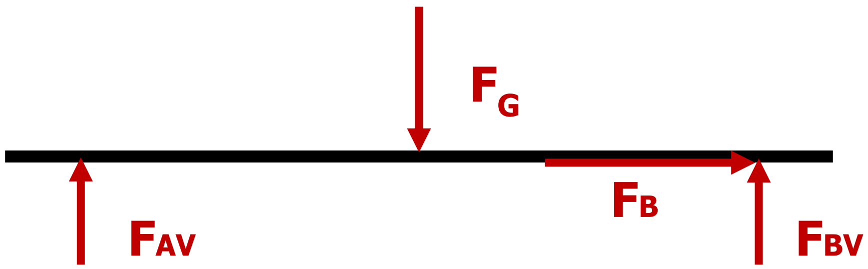


Abbildung 32: statisch bestimmter Träger

Da in diesem Beispiel auf die Brücke nur vertikale Lasten wirken, würde man theoretisch auch nur vertikale Auflagerkräfte in Form von zwei Loslagern benötigen. Aus Sicherheitsgründen sollte man das in der Statik aber nie tun, da bei Unwetter zum Beispiel ein starker Seitenwind aufkommen kann.

Wenn die Anzahl der zu berechnenden Auflagerkräfte mit der Anzahl der möglichen Gleichgewichtsbedingungen (die möglichen Bewegungsrichtungen Horizontal, Vertikal, Drehung) übereinstimmt, ist ein Tragwerk statisch bestimmt.

7.7.2. Statisch unbestimmt

Ein statisch unbestimmter Träger kann über- oder unterbestimmt sein.

a) Überbestimmt

Sind mehr Stützen vorhanden als benötigt werden, spricht man von einer statischen Überbestimmtheit. Ein Träger mit zwei Festlagern wäre somit zum Beispiel 1-fach statisch unbestimmt gelagert, weil er vier Auflagerunbekannte hat. Da zur Berechnung nur drei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen, können die Auflagerkräfte nicht mehr eindeutig ermittelt werden.

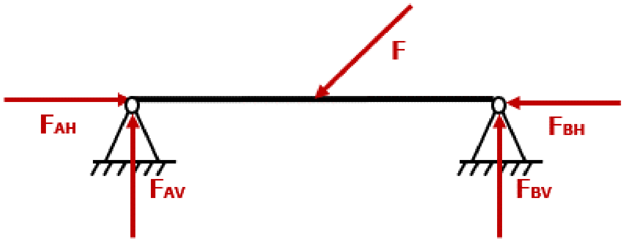


Abbildung 33: statisch überbestimmter Träger

b) Unterbestimmt

Ein statisch unterbestimmter Träger kann nicht im Gleichgewicht gehalten werden, da zu wenige Lagerreaktionen vorhanden sind. Das System wäre somit beweglich (kinematisch) und im statischen Sinne unbrauchbar.

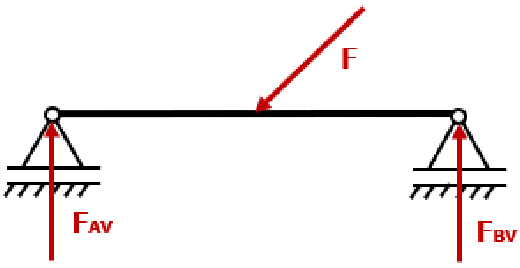


Abbildung 34: statisch unterbestimmter Träger

Blatt 7-2: Grundlagen der Statik

7.8 Berechnung der Auflagerkräfte am Beispiel einer einfachen Balkenbrücke

Als Grundlage für all unsere Berechnungen gelten die drei Gleichgewichtsbedingung der Statik: $\sum H = 0, \sum V = 0, \sum M = 0$. Mit deren Hilfe kann man die unbekannten Auflagerkräfte und Momente bestimmen.

Gegeben ist eine Balkenbrücke, die mit einer schrägen Windkraft belastet wird. Die Windkraft ist in der Kraft F zusammengefasst. Wir nehmen vereinfacht an, dass die Brücke selbst gewichtslos sei. Der Winkel α beträgt 30°. Gesucht werden zur Dimensionierung der Brücke die Auflagerreaktionen des Los- und Festlagers.

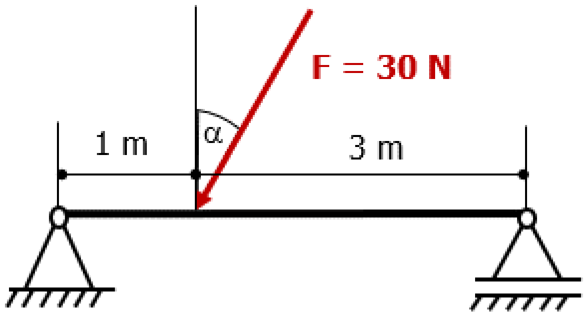


Abbildung 35: Rechenbeispiel Einfeldträger

Zur übersichtlicheren Darstellung wird der Einfeldträger zunächst freigeschnitten:

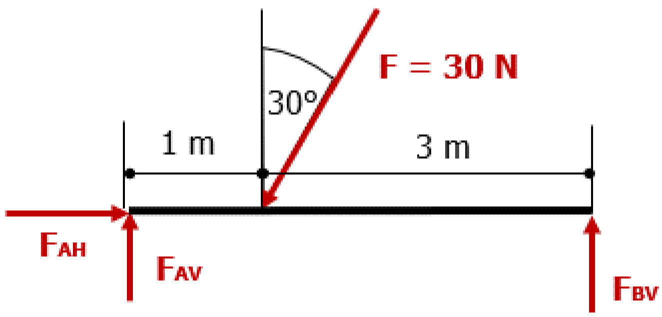


Abbildung 36: Freigemachter Einfeldträger

Um ein Kräftegleichgewicht zu erstellen, muss die Kraft F in ihre Komponenten zerlegt werden:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{F_\text{H}}{F} \qquad / \ (\cdot F)$$

$$\boldsymbol{F_\text{H}} = \sin(\alpha) \cdot F = \sin(30) \cdot 30\ \text{N} = \frac{1}{2} \cdot 30\ \text{N} = \mathbf{15\ N}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{F_\text{V}}{F} \qquad / \ (\cdot F)$$

$$\boldsymbol{F_\text{V}} = \cos(\alpha) \cdot F = \cos(30) \cdot 30\ \text{N} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 30\ \text{N} = \mathbf{26\ N}$$

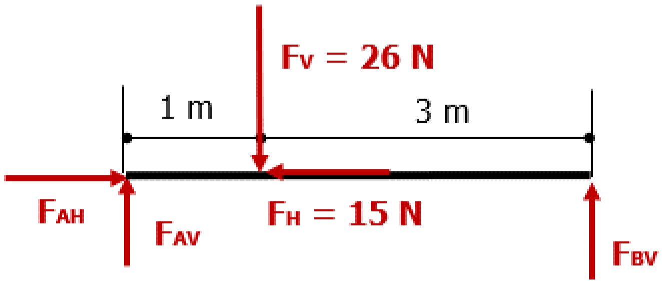


Abbildung 37: Freigemachter Einfeldträger mit Kräftezerlegung

Wichtig ist es, bei allen Kräften die richtige Richtung und damit das richtige Vorzeichen anzugeben. Nun überlegt man sich, welche Kräfte unbekannt sind. In diesem Fall sind das die Auflagerreaktionen F_AV, F_BV und F_BH.
Die unbekannten Kräfte muss man jetzt geschickt unter Einbezug der Gleichgewichtsbedingungen der Statik ermitteln. Pro aufgestellte Gleichung darf es natürlich nur eine unbekannte Kraft geben, um die Gleichung lösen zu können. Hier bietet es sich daher an, mit dem Aufstellen des horizontalen Gleichgewichts anzufangen.

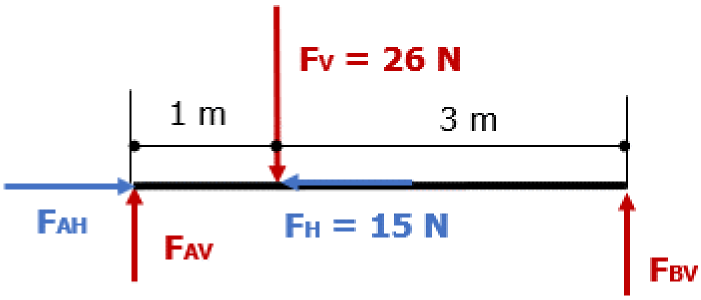


Abbildung 38: Einfeldträger Kräftegleichgewicht horizontal

$$\sum H = F_{AH} - F_H = 0$$
$$F_H = \boldsymbol{F_{AH}} = \mathbf{15\ N}$$

Da es zwei vertikale Auflagerkräfte gibt, ist deren Ermittlung etwas schwieriger. Würde man das vertikale Gleichgewicht aufstellen, so hätte man darin die zwei Unbekannten F_{AV} und F_{BV} und würde keine Lösung erhalten.

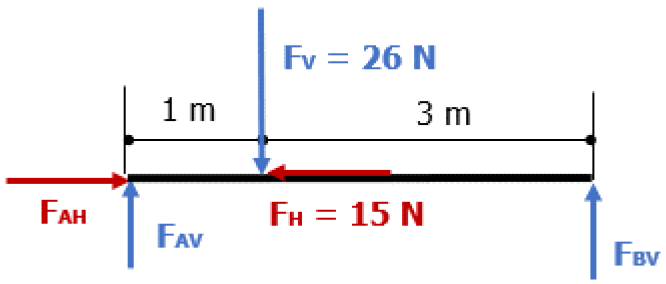


Abbildung 39: Einfeldträger Kräftegleichgewicht vertikal

Man wüsste nur, dass beide Unbekannte addiert 26 N ergeben müssten.

$$\sum V = F_{AV} + F_{BV} - F_V = 0$$
$$\sum V = F_{AV} + F_{BV} = 26\ \mathrm{N}$$

Der Trick ist der Einbezug der dritten Gleichgewichtsbedingung $\sum \mathrm{M} = 0$.

Legen wir den Drehpunkt A an eines der beiden Lager, so entfallen beim Aufstellen des Momentengleichgewichts diese Auflagerkräfte, da die Wirkungslinien der Auflagerkräfte genau durch unseren Drehpunkt gehen. Der Hebelarm zwischen der Wirkungslinie und dem Drehpunkt beträgt dann null, wodurch auch das Moment (Kraft mal Hebelarm) null wird.

Die Auflagerkraft des anderen Lagers kann somit unter Einbezug der angreifenden Kraft bestimmt werden. Wichtig ist, dass man beachtet, in welche Richtung die jeweiligen Momente drehen.

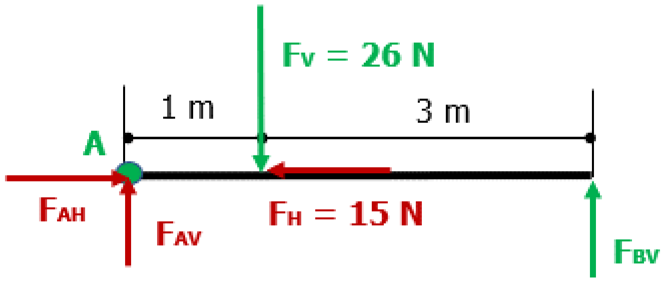


Abbildung 40: Einfeldträger Momente Punkt A

Es führen nur die Kräfte F_V und F_{BV} zu einem Moment im Punkt A:

$$\sum M_A \curvearrowleft = F_{AH} \cdot 0 - F_{AV} \cdot 0 + F_H \cdot 0 + F_{BV} \cdot (3+1)\ \mathrm{m} - F_V \cdot 1\ \mathrm{m} = 0$$
$$= F_{BV} \cdot 4\ \mathrm{m} - F_V \cdot 1\ \mathrm{m} = 0$$
$$\boldsymbol{F_{BV}} = \frac{F_V \cdot 1\ \mathrm{m}}{4\ \mathrm{m}} = \frac{26\ \mathrm{N} \cdot 1\ \mathrm{m}}{4\ \mathrm{m}} = \mathbf{6,5\ N}$$

Jetzt kann man zur Ermittlung der letzten Unbekannten das vertikale Gleichgewicht aufstellen:

$$\sum V = F_{AV} + F_{BV} - F_V = 0$$
$$\boldsymbol{F_{AV}} = F_V - F_{BV} = 26\ \mathrm{N} - 6{,}5\ \mathrm{N} = \mathbf{19{,}5\ N}$$

Zur unabhängigen Kontrolle kann man noch das Moment um den Drehpunkt B ermitteln:

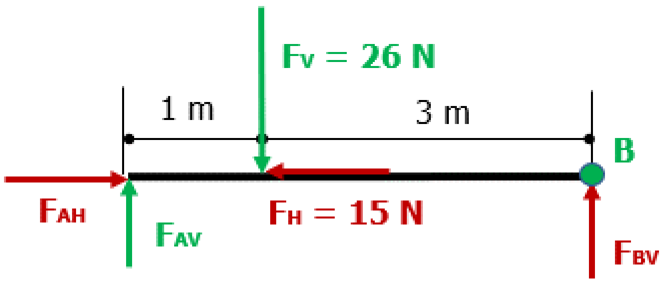


Abbildung 41: Einfeldträger Momente Punkt B

$$\sum M_{\mathrm{B}} \curvearrowleft = -F_{\mathrm{AV}} \cdot 4\ \mathrm{m} + F_{\mathrm{V}} \cdot 3\ \mathrm{m} = 0$$

$$\boldsymbol{F_{\mathrm{AV}}} = \frac{F_{\mathrm{V}} \cdot 3\ \mathrm{m}}{4\ \mathrm{m}} = \frac{26\ \mathrm{N} \cdot 3\ \mathrm{m}}{4\ \mathrm{m}} = \mathbf{19{,}5\ N}$$

Es spielt also keine Rolle, um welches Lager man dreht. Mit Hilfe der berechneten Auflagerkräfte kann die Brücke nun konstruiert werden.

Blatt 7-4: Alles im Gleichgewicht?

Blatt 7-5: Auflagerkräfte I

Blatt 7-6: Auflagerkräfte II

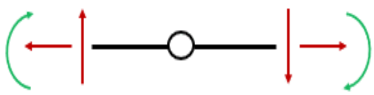
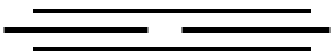
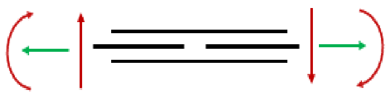
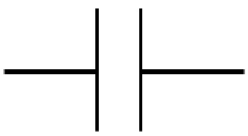
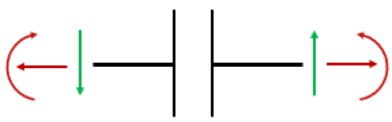
7.9 Gelenke

Gelenke haben eine ähnliche Aufgabe wie Lager und werden daher auch als Zwischenlager bezeichnet. Sie dienen der Fixierung und sollen nur bestimmte Kräfte übertragen. Das Momentengelenk der Brücke auf Abbildung 42 kann so beispielsweise nur Quer- und Normalkräfte übertragen, aber keine Momente.

Abbildung 42: Momentengelenk

Die wichtigsten Gelenkarten werden in Tabelle 11 zusammengefasst.

Tabelle 11: Gelenkarten (angelehnt an Skript TM, S.7)

Gelenkart	Wertigkeit und Freischnitt	Beschreibung
Momentengelenk 	Zweiwertig 	Kann keine Momente übertragen.
Normalkraftgelenk 	Zweiwertig 	Kann keine Normalkräfte übertragen.
Querkraftgelenk 	Zweiwertig 	Kann keine Querkräfte übertragen.

Um die Aufgabe von Gelenken in der Statik zu veranschaulichen, betrachten wir eine besondere Art der Brückenbauweise: den Gerberträger. Dieser wurde von Heinrich Gottfried Gerber, einem deutschen Bauingenieur, entworfen. Viele Brücken basieren heute weltweit auf diesem Konstruktionsprinzip, darunter auch das Blaue Wunder in Dresden.

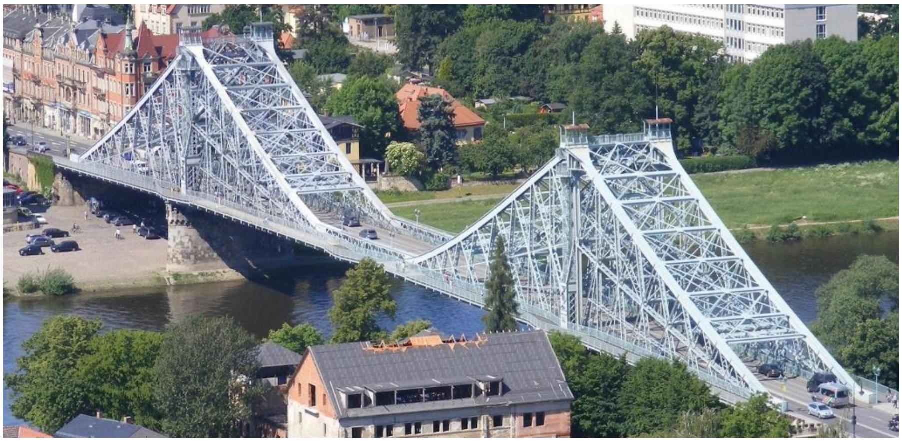
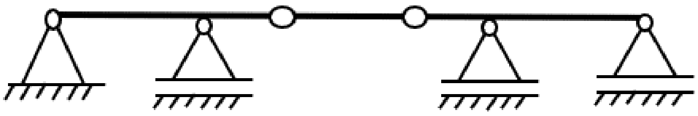


Abbildung 43: Das Blaue Wunder in Dresden - ein Gerberträger

Auf den ersten Blick würde man die Brücke folgendermaßen freischneiden:

Durch die zwei Loslager in der Mitte des Trägers gibt es hier fünf Auflagerunbekannte, aber nur drei Gleichgewichtsbedingungen, wodurch die Auflagerkräfte nicht berechnet werden können. Der Träger wäre somit 2-fach statisch unbestimmt. Mit Hilfe von Gelenken kann man diesen Durchlaufträger in ein statisch bestimmtes System umwandeln. Die Zahl der Gelenke muss dabei immer dem Grad der statischen Unbestimmtheit entsprechen.



Durch das Einsetzen der Gelenke erhalten wir den berühmten Gerberträger mit dem man große Hindernisse überbrücken kann. Die Brücke hat also zwei Ausleger auf beiden Seiten und einen dazwischen eingehängten Träger. Man kann sich das statische System ungefähr so vorstellen:

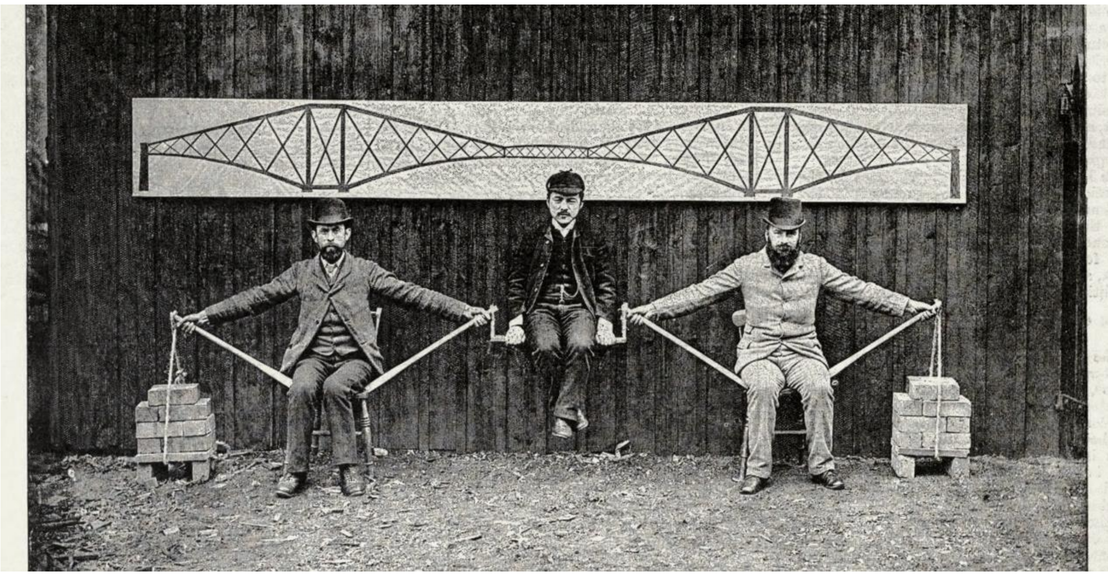


Abbildung 44: Veranschaulichung des statischen Systems eines Gerberträgers
(https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cantilever_bridge_human_model.jpg)

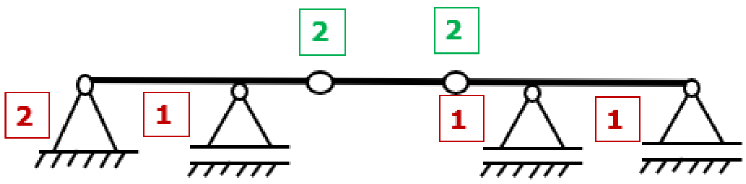
Wenn man sich unsicher ist, ob ein System mit einem Moment statisch bestimmt ist, lässt sich die statische Bestimmtheit auch anhand einer Formel berechnen. Für ebene Systeme gilt:

$$f = 3k - (a + z)$$

$f =$ Freiheitsgrade
$k =$ Anzahl der starren Körper
$a =$ Anzahl der Auflagerreaktionen
$z =$ Anzahl der Zwischenreaktionen (bei einem Gelenk mit 2 Stäben $z = 2$)

$$\text{wenn } f \begin{cases} = \mathrm{i} > 0\text{: i-fach verschieblich} \\ = 0 \text{ statisch bestimmt} \\ = \mathrm{i} < 0\text{: i-fach statisch unbestimmt} \end{cases}$$

Auf den Gerberträger bezogen gilt dann:



Der Träger besteht aus drei starren Körpern (k = 3), hat fünf Auflagerreaktionen (rot: a = 5) und noch zusätzlich wegen der zwei Gelenke vier Zwischenreaktionen (grün: z = 4).

$$f = 3 \cdot 3 - (5 + 4) = 0$$

Der Gerberträger ist somit statisch bestimmt.

Blatt 7-7: Gelenkig durch die Statik

Blatt 7-8: Gelenkreaktionen

7.10 Äußere und innere Kräfte

Bis jetzt haben wir durch die Ermittlung der Auflagerkräfte das äußere Gleichgewicht an einem System hergestellt. Für die Statik spielt aber auch der Kräfteverlauf im Inneren eine große Rolle.

Äußere Kräfte sind in der Technischen Mechanik Kräfte bzw. Lasten, die von außen als Aktionen auf den Körper einwirken. Hierzu zählen auch die Reaktionskräfte, also die Stütz- und Auflagerkräfte.

Innere Kräfte sind eine Folge der Wirkung der äußeren Kräfte im Inneren des Bauteils. Sie werden meist erst bei einer Überbelastung des Bauteils durch Verbiegungen oder Risse sichtbar. Innere Kräfte, auch Schnittgrößen genannt, sind:

- Die in Trägerlängsrichtung wirkende Normalkraft N
- Die rechtwinklig zur Längsachse wirkende Querkraft Q
- Das Biegemoment M

7.11 Ermittlung der inneren Kräfte

Ehe sich die inneren versteckten Kräfte durch Schäden am Bauteil oder gar einem Einsturz bemerkbar machen, muss der Ingenieur die Materialbeanspruchung sichtbar machen. Die Schnittkräfte kann man mit Hilfe eines gedanklichen rechtwinkligen Schnitts durch den Bauteilquerschnitt ermitteln.

Am besten veranschaulichen kann man das wieder anhand der einfachen Brücke, die durch die schräge Kraft F belastet wird. Die Brücke entspricht dem Bauprinzip eines Einfeldträgers.

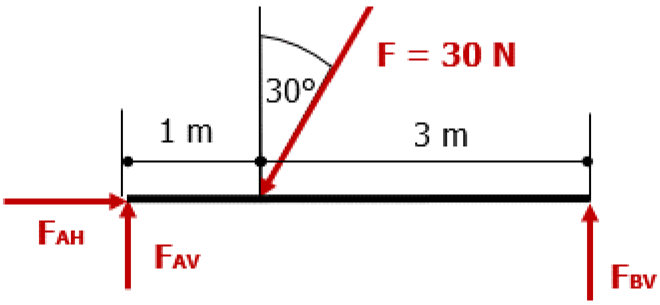


Abbildung 45: Beispiel Einfeldträger

Wir schneiden jetzt den Einfeldträger zwischen dem Auflager A und der angreifenden Kraft F senkrecht zur Längsachse durch, um die inneren Kräfte zu ermitteln.

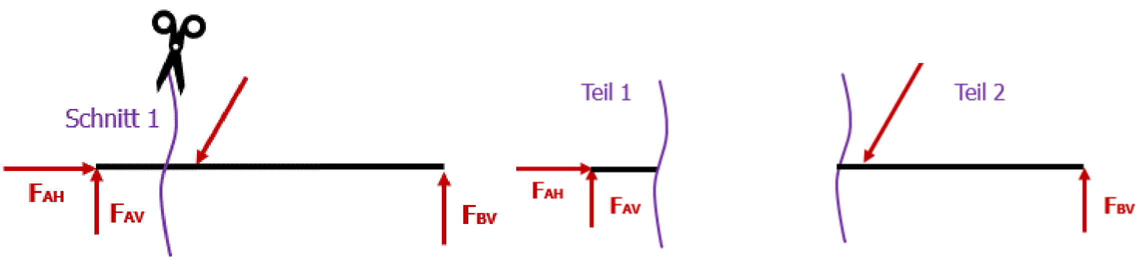


Abbildung 46: Schnittprinzip 1

Nach dem Schneiden entstehen ein positives und ein negatives Schnittufer. Die gestrichelte Linie unterhalb des Trägers wird als gestrichelte Faser bezeichnet und legt das Vorzeichen fest.

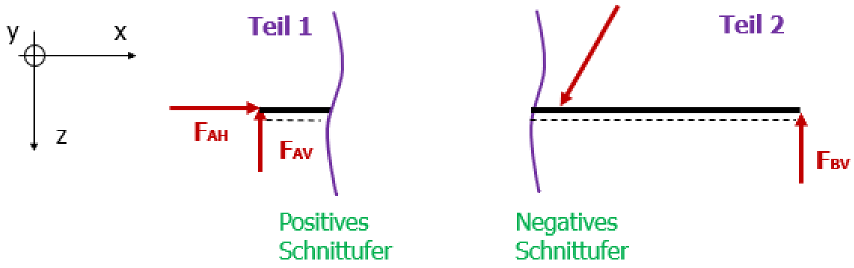


Abbildung 47: Schnittprinzip 2

Die wirkenden Kräfte an jedem Teil würden dazu führen, dass sich die Trägerteile an den freien Enden verschieben, da hier keine Stützen mehr vorhanden sind. Da die Statik aber immer ihre Ruhe möchte, setzen wir an die Schnittufer jetzt Kräfte, die diese Bewegung verhindern.

Ist die gestrichelte Faser unterhalb der Trägerachse, dann muss man die kartesischen Koordinaten am positiven Schnittufer festlegen.

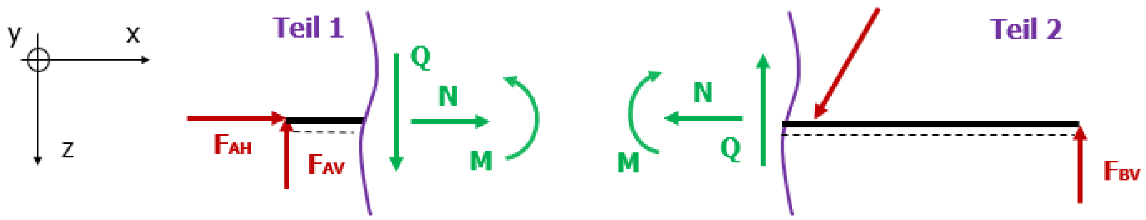


Abbildung 48: Schnittprinzip 3

Diese sogenannten Schnittgrößen verkörpern die Wirkung des fehlenden Trägerteils. Die Vorzeichen der Schnittgrößen spielen bei der Auslegung eines Bauteils eine große Rolle.

Positive Schnittgrößen zeigen am positiven Schnittufer immer in die positive Koordinatenrichtung.

Mit Hilfe eines Merksatzes kann man sich die korrekten Vorzeichen leicht verinnerlichen:

Die Maus läuft in die positive Schnittrichtung zum Schnittufer (N), fällt herunter (Q) und springt dann wieder auf den Träger (M).

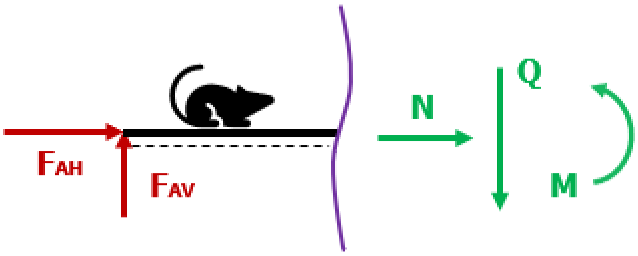


Abbildung 49: Merkregel Schnittufer

Zieht das Moment an der gestrichelten Faser, so ist es immer positiv, wird die Faser dagegen gedrückt, ist das Moment negativ.

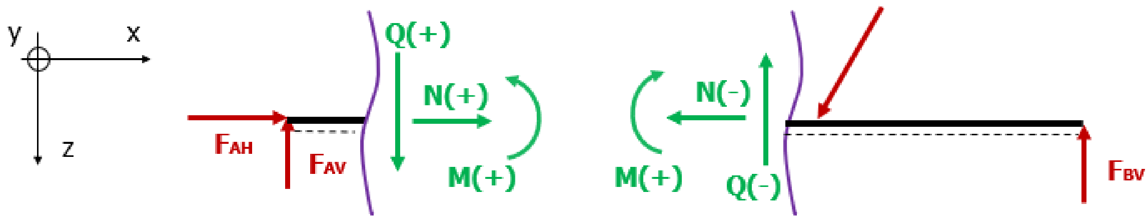


Abbildung 50: Schnittprinzip 4

Da die Schnittgrößen an Teil 1 den Schnittgrößen an Teil 2 exakt entgegengerichtet sein müssen, können diese dann leicht ergänzt werden.

7.12 Berechnen von Schnittgrößen

Die Berechnung der Schnittgrößen soll wieder beispielhaft an einer einfachen Brücke erfolgen, die durch eine senkrechte Kraft F belastet wird.

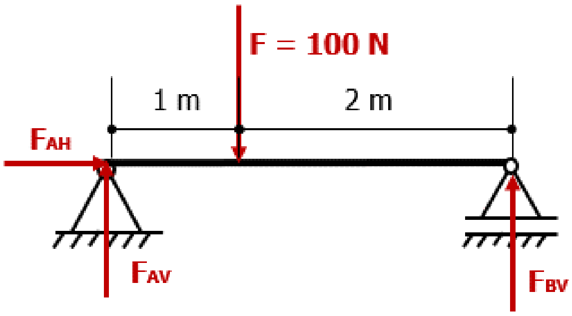


Abbildung 51: Freigeschnittener Einfeldträger

Die Auflagerkräfte kann man in diesem Fall leicht durch genauere Betrachtung der Aufteilung der Brücke ermitteln: F_{AH} muss 0 sein, da der Einfeldträger nicht in horizontaler Richtung belastet wird. F_{AV} muss genau 2/3 der Last aufnehmen, also 66,7 N und F_{BV} dann die übrigen 33,3 N.

Nun schneiden wir die Brücke an mehreren Stellen und ermitteln mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen die jeweiligen Schnittgrößen.

Bereich I $(0 < x < 1\ \mathrm{m})$

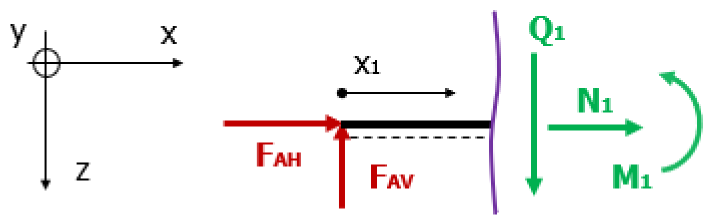


Abbildung 52: Schnittgrößenberechnung Bereich I

$$\sum H = \mathbf{0 = N_1}$$
$$\sum V = 0 = F_{AV} - Q_1$$
$$Q_1 = F_{AV} = \mathbf{66{,}7\ N}$$

Bei der Ermittlung des Drehmoments drehen wir um den Schnittpunkt 1:

$$\sum M = 0 = F_{AV} \cdot x_1 - M_1$$
$$M_1 = F_{AV} \cdot x_1$$
Für $x_1 = 0$ m gilt: $M_1(0) = F_{AV} \cdot 0 = 0$

Für $x_1 = 1$ m gilt: $M_1(1) = 19{,}5\ \mathrm{N} \cdot 1\ \mathrm{m} = 66{,}7\ \mathrm{Nm}$

Bereich II $(1\ \mathrm{m} < x < 3\ \mathrm{m})$

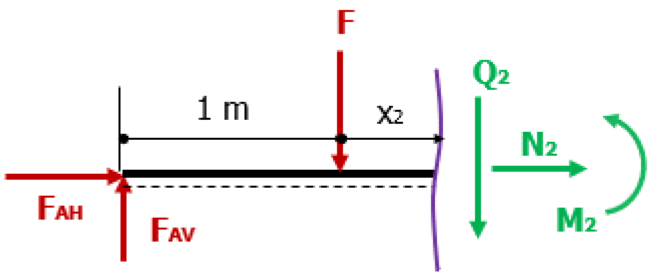


Abbildung 53: Schnittgrößenberechnung Bereich II

$$\sum H = \mathbf{0 = N_2}$$
$$\sum V = 0 = F_{AV} - F - Q_2$$
$$Q_2 = F_{AV} - F = 66{,}7\ \mathrm{N} - 100\ \mathrm{N} = \mathbf{-\ 33{,}3\ N}$$
$$\sum M = 0 = F_{AV}\,(1\ \mathrm{m} + x_2) - F \cdot x_2 - M_2$$
$$M_2 = F_{AV}\,(1\ \mathrm{m} + x_2) - F \cdot x_2$$
Für $x_2 = 0$ m gilt: $M_2(0) = 66{,}7\ \mathrm{N} \cdot (1\ \mathrm{m} + 0\ \mathrm{m}) - 100\ \mathrm{N} \cdot 0\ \mathrm{m} = 66{,}7\ \mathrm{Nm}$

Für $x_2 = 2$ m gilt: $M_2(4) = 66{,}7\ \mathrm{N} \cdot (1\ \mathrm{m} + 2\ \mathrm{m}) - 100 \cdot 2\ \mathrm{m} \approx 0\ \mathrm{Nm}$

Die Bestimmung der Schnittgrößen im letzten Trägerabschnitt hätte auch vom negativen Schnittufer aus erfolgen können:

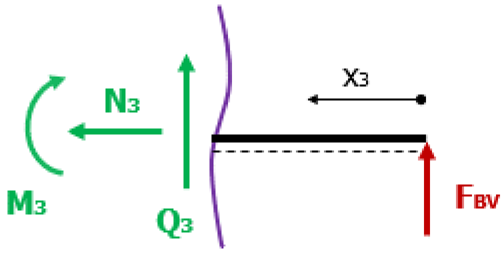


Abbildung 54: Schnittgrößenberechnung Bereich III Variante 1

$$\sum H = \mathbf{0} = \boldsymbol{N_3}$$

$$\sum V = 0 = F_{BV} + Q_3$$

$$\boldsymbol{Q_3} = -\, F_{BV} = \mathbf{-\,33{,}3\ N}$$

$$\sum M = 0 = -\, M_3 + F_{BV} \cdot x_3$$

$$M_3 = F_{BV} \cdot x_3$$

Für $x_3 = 0$ m gilt: $M_3(0) = 0$ Nm

Für $x_3 = 3$ m gilt: $M_3(2) = 33{,}3\ \mathrm{N} \cdot 2\ \mathrm{m} = \mathbf{66{,}7\ Nm}$

7.13 Schnittgrößenverlauf

Der Verlauf der Schnittkräfte wird grafisch in einem Diagramm dargestellt. Die x-Achse entspricht dabei der Trägerlänge und enthält die einzelnen Schnittstellen. Jeder Schnittstelle wird dann auf der z-Achse eine Schnittgröße zugeordnet. Dadurch ergibt sich der Schnittgrößenverlauf.

Für die Schnittgrößen gilt wieder:

- sind sie positiv (rote Farbe) werden sie auf der Seite mit der gestrichelten Zone dargestellt,
- sind sie negativ (blaue Farbe) werden sie auf der Seite gegenüber der gestrichelten Zone dargestellt.

Verbindet man die einzelnen Punkte miteinander erhält man den Verlauf von N, Q und M.

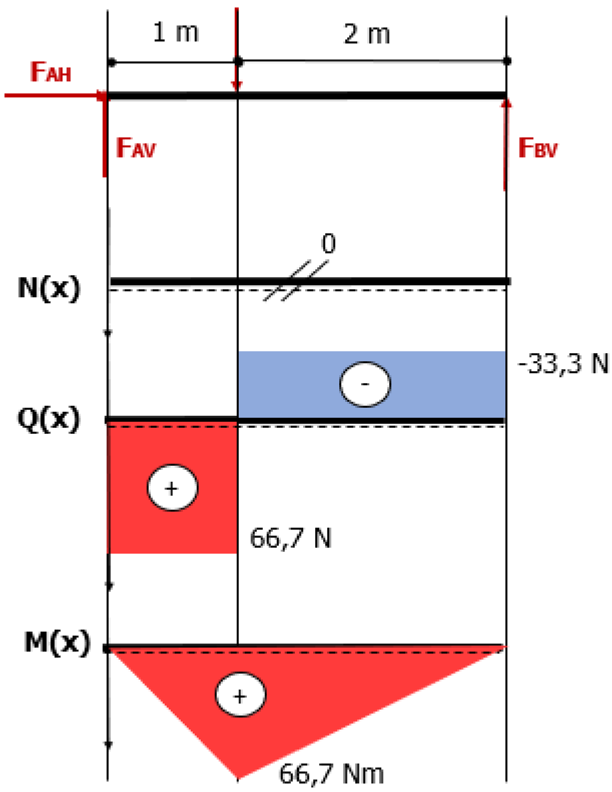
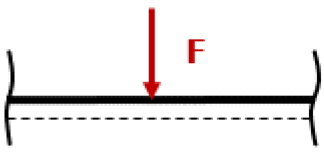
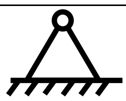
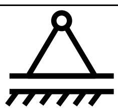


Abbildung 55: Schnittgrößenverlauf

Die Extremwerte werden in den Verläufen angegeben. Durch genauere Analyse der belasteten Brücke und der daraus resultierenden Verläufe kann man folgende Zusammenhänge erkennen:

- An den Brückenenden ist das Biegemoment gleich Null, da es sich um gelenkige Lager handelt.
- Die größte Belastung der Brücke ist direkt an der Kraftangriffsstelle.
- An dem Angriffspunkt der Kraft F hat der Querkraftverlauf einen Sprung. Dieser Sprung ist gleich groß, wie die dort wirkende Kraft F.
- Die Momentenlinie zeigt einen linearen Verlauf. An dem Angriffspunkt der Kraft hat sie einen Knick.

Tabelle 12: Charakteristika einer Belastung durch eine Einzellast (angelehnt an Skript TM)

Belastung	Skizze	Q-Verlauf	M-Verlauf
Einzelkraft		Mit Sprung	Mit Knick
Festlager		$\neq 0$	$= 0$
Loslager		$\neq 0$	$= 0$

Zwischen dem Biegemoment und der Querkraft besteht folgender Zusammenhang:

$$\frac{dM}{dx} = Q(x)$$

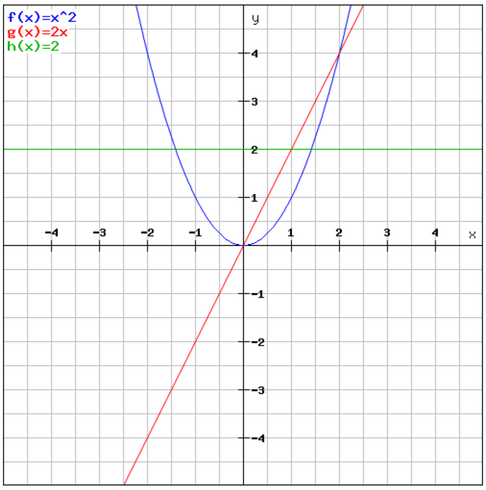
Leitet man die Funktion des Momentes ab, erhält man also den Querkraftverlauf. Andersherum kann die Steigung der Momentenlinie direkt aus der Querkraftlinie ermittelt werden.

Zwischen der Lastverteilung und dem Querkraftverlauf gilt außerdem:

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x)$$

<u>Ableitungen in der Mathematik</u>

Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ gibt die Steigung der Funktion f an der Stelle x an. Die Ableitungen können mit Hilfe der Ableitungs-regeln ermitteln werden. Oft genügt es aber auch schon, sich die grafische Darstellung der Funktion genauer anzuschauen, um daraus die Ableitung zu erhalten.



Für die Bestimmung der Extremwerte einer Funktion muss die folgende Bedingung erfüllt sein: $f'(x) = 0$

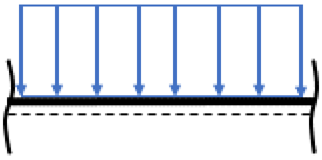
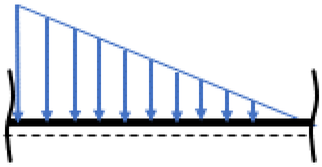
Es handelt sich um einen Hochpunkt, wenn: $f''(x) < 0$

Und um einen Tiefpunkt, wenn: $f''(x) > 0$

Abschließend kann noch die fehlende Variable des Extrempunktes durch Einsetzen in die Ausgangsfunktion bestimmt werden.

Wird die Brücke also zum Beispiel durch einen Spannungsverlauf belastet, ergeben sich folgende Zusammenhänge:

Tabelle 13: Belastung durch einen Spannungsverlauf (angelehnt an Skript TM)

Belastung	**q-Verlauf** (**≙ - f´´(x)**)	**Q-Verlauf** (**≙ f´(x)**)	**M-Verlauf** (**≙ f(x)**)
Spannungsver-lauf konstant		linear	quadratisch
Spannungsver-lauf linear		quadratisch	kubisch

Blatt 7-9: Schnittgrößenverlauf I

Blatt 7-10: Schnittgrößenverlauf II

7.14 Zusammenfassung: Kochrezept zur Statik

Es gibt in der Statik viele unterschiedliche Konstruktionen, die berechnet werden müssen. Um hierbei einen klaren Kopf zu bewahren, empfiehlt es sich, sich bei der Berechnung an den folgenden Schritten zu orientieren:

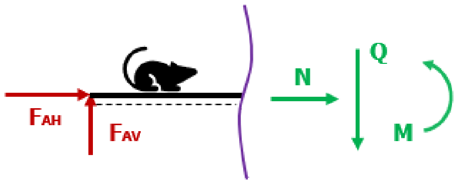
1. **Freischneiden des Körpers**
   - Lager- und Gelenkreaktionen einzeichnen und richtig beschriften (Die Reaktionskräfte der Lagerungen werden alphabetisch mit einem Buchstaben versehen und je nach Wertigkeit des Lagers noch zusätzlich mit einem V für vertikal oder H für horizontal)
   - Kräfte zerlegen/ Resultierende bilden
   - Die Gewichtskraft berechnen und richtig einzeichnen (sie greift immer im Schwerpunkt des Körpers an)

2. **Prüfung der statischen Bestimmtheit**
   - Die Anzahl der zu berechnenden Auflagerkräfte muss mit der Anzahl der zur Verfügung stehenden Gleichungen übereinstimmen
   - Trifft dies nicht zu, ist der Träger statisch unter- oder überbestimmt, die Rechnung wird dann an diesem Punkt abgebrochen
   - Bei einem Gelenkträger kann hierzu die Formel für die statische Bestimmtheit hilfreich sein: $f = 3k - (a + z)$

3. **Berechnung der Auflager- und Zwischenkräfte**
   - Alle unbekannten Kräfte müssen ermittelt werden
   - Hier müssen die drei Gleichgewichtsbedingungen der Statik ($\sum H = 0, \sum V = 0$, $\sum M = 0$) herangezogen werden
   - Bei einem einfachen Balken führt meist die Drehung um eines der Lager zum Ergebnis

4. **Einteilung des Trägers in Teilabschnitte**
   - Die Teilabschnitte müssen so gewählt werden, dass alle wichtigen Schnittgrößen bestimmt werden können (es muss an Einzelkräften, Einzelmomenten oder Gelenken geschnitten werden)

- Bei Linienlasten über den gesamten Balken reicht ein Schnitt durch die Last aus
- Es ist vor allem auf die gestrichelte Faser, die die Koordinaten und die Richtung der Schnittgrößen festlegt, zu achten



- Prinzipiell ist es egal, ob man mit dem negativen oder positiven Schnittufer rechnet

5. Berechnung der Schnittgrößen

- An jedem Teilabschnitt werden mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen die Schnittgrößen ermittelt
- Die Schnittgrößen werden mit Zahlen für jeden Teilabschnitt durchnummeriert
- Die Schnittgrößen können je nach Belastung von der Variablen x abhängig sein
- Je nach Belastung müssen die Extremwerte und ihre Lage mathematisch ermittelt werden

6. Skizzieren der Schnittgrößen mit Angabe der Extremwerte

- Sind sie positiv, werden sie auf der Seite der gestrichelten Faser aufgezeichnet, negative Schnittgrößen werden gegenüber eingezeichnet
- Es müssen alle Extremwerte und die Lage der Extremwerte angegeben werden
- Folgende Zusammenhänge können hilfreich sein: $\frac{dM}{dx} = Q$ und $\frac{dQ}{dx} = -q(x)$.

Blatt 7-11: Die Ingenieuraufgabe

Exkurs: Fachwerke

Ein Fachwerk besteht aus Stäben, die nur auf Zug und Druck beansprucht werden. Ganz nach dem Prinzip der Leichtbauweise kann es so Massivträger mit einem geringen Werkstoffaufwand ersetzen. Das Dreieck als grundlegende Struktur ist hierbei statisch besonders vorteilhaft, denn es ist sogar bei einer gelenkigen Verbindung formstabil. Die Fachwerksbauart ist bautechnisch sehr alt und wird unter anderem bei Häusern und Brücken angewendet. Vor allem beim Brückenbau können so große Entfernungen stabil verbunden werden.

Abbildung 56: Fachwerke

Die Stäbe sind durch Knoten miteinander verbunden. Um die Berechnung zu vereinfachen, werden idealisierte Annahmen getroffen. So geht man davon aus, dass die Stäbe an den Knoten gelenkig miteinander verbunden sind. Außerdem greifen die äußeren Kräfte nur an den Knoten an.

Fachwerkaufbau

Fachwerkkonstruktionen werden nach zwei Bildungsgesetzen konstruiert.

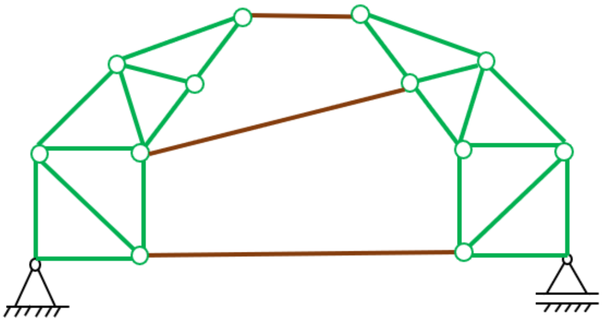


Abbildung 57: Fachwerkaufbau

1. Bildungsgesetz

   Drei Stäbe und drei Knoten werden zu einem Dreieck verbunden. An zwei Knoten des Dreiecks schließt man nun wieder je einen Stab an und verbindet die zwei nicht parallel liegenden Stäbe mit einem neuen Knoten. Dieses Schema kann beliebig fortgesetzt werden.

2. Bildungsgesetz

   Zwei Fachwerke, die nach dem 1. Bildungsgesetz konstruiert wurden, können durch drei weitere, nicht parallel und nicht zentral liegende, Stäbe miteinander verbunden werden. Anstelle von zwei Stäben kann man auch einen Knoten verwenden, der an beide Teilfachwerke direkt anschließt.

Knotenpunktverfahren

Bei der Berechnung eines Ausschnittes dieser Fachwerkbrücke geht man folgendermaßen vor:

1. Zunächst werden alle Stäbe mit arabischen Zahlen und die Knoten einschließlich der Auflager mit römischen Zahlen durchnummeriert.

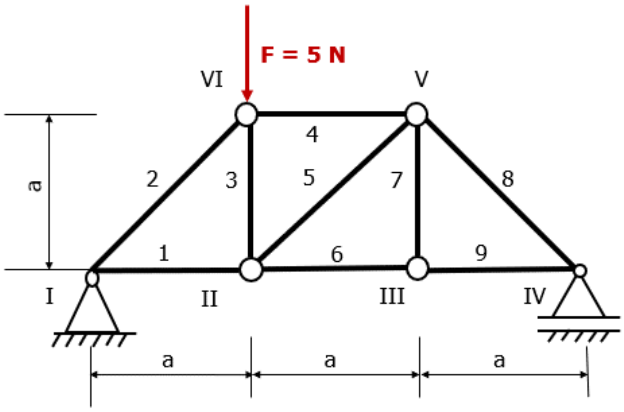


Abbildung 58: Beispiel Knotenpunktverfahren I

2. Wie auch bei den anderen statischen Berechnungen muss daraufhin überprüft werden, ob das Fachwerk statisch bestimmt ist. Dazu bedient man sich folgender Formel:

$$f = 2k - (a + s)$$

k = Anzahl der Knoten
a = Lagerreaktionen
s = Anzahl der Stäbe

Ist f gleich null, so ist das ebene Fachwerk statisch bestimmt.

Auf das obige Beispiel bezogen, bedeutet das:

$$f = 2 \cdot 6 - (3 + 9) = 0$$

3. Um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten, sollte man zunächst überprüfen, ob das Fachwerk Nullstäbe enthält. Das sind Stäbe, an denen die Stabkraft Null ist. Auch Auflagerkräfte müssen in die Überlegung mit einbezogen werden. Um einen Nullstab handelt es sich, wenn einer der folgenden drei Fälle zutrifft:

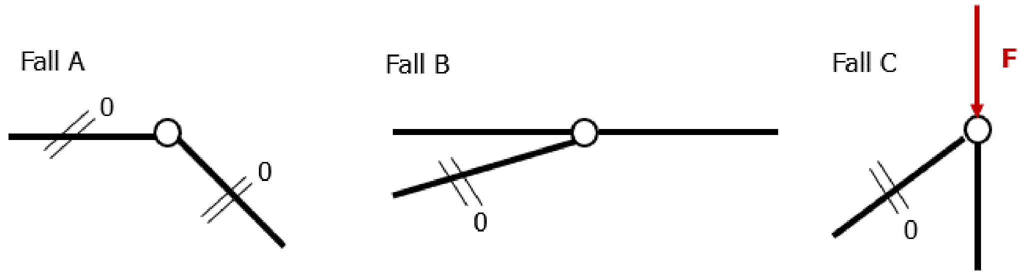


Abbildung 59: Nullstäbe

a) Zwei nicht gleichgerichtete Stäbe, die an einem unbelasteten Knoten angeschlossen sind, sind beide Nullstäbe.
b) Wenn an einem unbelasteten Knoten mit drei Stabanschlüssen, zwei Stäbe in dieselbe Richtung zeigen, ist der 3. Stab ein Nullstab.
c) Besitzt an einem belasteten Knoten mit zwei Stabanschlüssen ein Stab dieselbe Richtung wie die äußere Kraft, so ist der 2. Stab ein Nullstab.

In Abbildung 59 handelt es sich z. B. bei Stab 7 nach Fall B um einen Nullstab.
Beachte auch: Durch das Erkennen von Nullstäben können sich weitere Nullstäbe ergeben.

4. Wie bereits mehrfach durchgeführt, können jetzt die Auflagerkräfte mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen der Statik bestimmt werden.
Bei unserem Beispiel ist F_{AH} Null, da das Fachwerk nicht in horizontaler Richtung belastet wird. F_{AV} erhält man durch die Bildung des Moments um das Auflager B:

$$M_B \curvearrowleft = -F_{AV} \cdot 3a + F \cdot 2a$$

$$F_{AV} = \frac{F \cdot 2a}{3a} = \frac{2}{3} F = 3{,}3 \text{ N}$$

F_{BV} ergibt sich aus dem vertikalen Gleichgewicht:

$$\sum V = 0 = F_{AV} + F_{BV} - 5 \text{ N}$$

$$F_{BV} = 5\text{N} - 3{,}3 \text{ N} = 1{,}7 \text{ N}$$

5. Die Stabkräfte können nun mittels des sogenannten Knotenpunktverfahrens ermittelt werden:
   - Hierzu sucht man sich einen Knoten aus, an dem maximal zwei unbekannte Stabkräfte angreifen.
   - Dieser Knoten wird als Erster freigeschnitten. An den freigeschnittenen Stäben wirkt dabei jeweils eine Stabkraft.
   - Drückt die Stabkraft auf den Knoten, ist sie negativ. Zeigt sie vom Knoten weg, ist sie positiv. Beim Freischneiden geht man zunächst davon aus, dass es sich um Zugstäbe handelt.

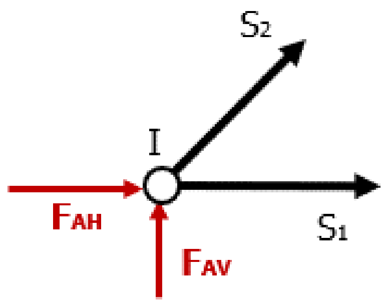


Abbildung 60: Beispiel Knotenpunktverfahren II

- Mit Hilfe der 1. und 2. Gleichgewichtsbedingung der Statik können an dem Knoten nun die Stabkräfte berechnet werden.

$$\sum V = 0 = F_{AV} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_2$$

$$S_2 = -\frac{F_{AV}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{3{,}3\ N}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 4{,}7\ N$$

$$\sum H = 0 = F_{AH} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_2 + S_1$$

$$S_1 = -F_{AH} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot S_2 = 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 4{,}7\ N = -3{,}3\ N$$

- Wegen dem 3. Newtonschen Axiom „actio = reactio" wirkt auch immer eine Gegenkraft auf den Knoten.
- Hat man die Stabkräfte ermittelt, sucht man sich den nächsten Knoten mit zwei Unbekannten, usw.

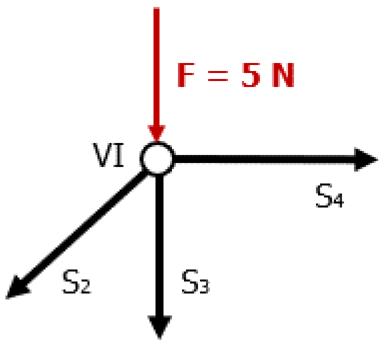


Abbildung 61: Beispiel Knotenpunktverfahren III

Verbindungen aus Holz im Fachwerkbau

Fachwerkkonstruktionen aus Holz bestehen aus Kanthölzer. Diese werden so zusammengesetzt, dass sie ein stabiles Traggerüst bilden. Bei der Wandkonstruktion unterscheidet man zwischen tragenden und aussteifenden Hölzern.

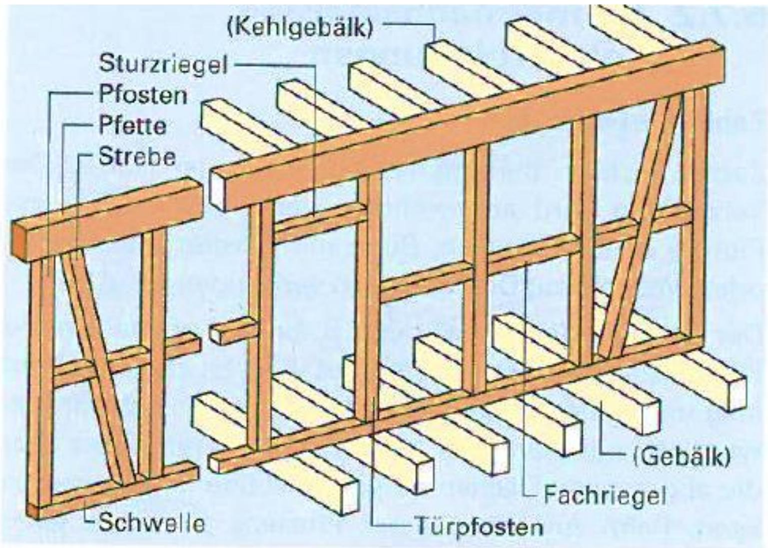


Abbildung 62: Aufbau einer Fachwerkwand
(Betran et al. 2012, S. 187)

a) Tragende Hölzer

Zu den tragenden Hölzern gehören beispielsweise die Pfosten, die Wandpfette (Rähm) und die Schwelle. Ihre Funktion ist es, senkrechte Lasten aufzunehmen und diese in das Fundament zu leiten.

- Die **Wandpfette** verläuft waagrecht und schließt die Wand nach oben ab. Über sie werden vor allem die Lasten der Decken- und Dachkonstruktion in die Pfosten weitergeleitet. Da hier hauptsächlich eine Beanspruchung auf Biegung stattfindet, empfiehlt sich festigkeitstechnisch ein hochkant verlegter rechteckiger Querschnitt.
- Die **Schwelle** verläuft wie die Pfette waagrecht und schließt die Wand nach unten ab. Da sie je nach Bauart direkt auf einer Balkenlage oder einem Fundament aufliegt, muss sie im Freien gegen Feuchtigkeit geschützt werden.
- Die **Pfosten** werden stets senkrecht angebracht und leiten die senkrechten Lasten in die Schwelle weiter. Sie werden auf Druck beansprucht und haben einen quadratischen Querschnitt. Die Verbindung zur Schwelle und zum Rähm erfolgt mittels Zapfen. In Ausnahmefällen können sie auch in Riegeln oder Streben enden.

b) Aussteifende Hölzer

Hinzu kommen aussteifende Hölzer, die wie der Name schon sagt, zur Aussteifung der Konstruktion dienen. Man unterscheidet hierbei zwischen den Streben und den Riegeln.

- Die Längsaussteifung übernehmen dabei die **Streben**. Sie sind schräg stehend (in einem Winkel von 70-75° zur Schwelle) und leiten waagrechte Lasten, die beispielsweise durch den Wind verursacht werden, über die Schwelle ab. Bautechnisch gesehen sollten sie daher mindestens an beiden Enden der Fachwerkwand in entgegengesetzter Lage mit einem Abstand von 8-12 cm zum Pfosten angebracht werden. In der Regel zeigt der obere Strebenkopf in Richtung der Außenwand. Als Querschnitt bietet sich eine quadratische oder rechteckige Form an. Die Verbindung zur Schwelle und zum Rähm erfolgt über einen Versatz mit Zapfen.

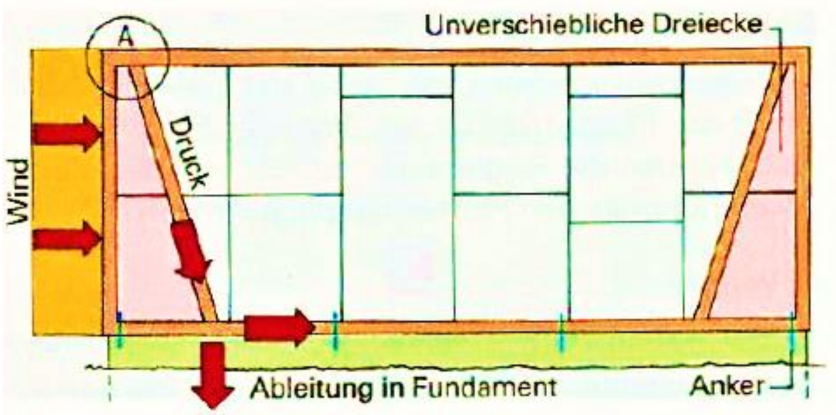


Abbildung 63: Lastableitung über eine Strebe
(Betran et al. 2012, S. 187)

- Die **Riegel** werden waagrecht angebracht und liegen zwischen den Pfosten. Fachriegel stabilisieren die Ausfachungen und Sturz- und Brüstungsriegel dienen zur Begrenzung von Tür- und Fensteröffnungen. Riegel werden gelegentlich auch zwischen den Streben angebracht. Die Verbindung mit den Pfosten erfolgt über Zapfen oder Balkenschuhe.

Bei der Konstruktion einer Fachwerkwand kommen tragende Elemente (Wandpfette, Schwelle, Pfosten) und aussteifende Hölzer (Streben, Riegel) zum Einsatz.

Schmuckformen im Fachwerkbau

Schmuckformen sind je nach Region stark unterschiedlich ausgeprägt. Die hierfür verwendeten Hölzer können entweder einem rein statischen Zweck dienen oder wurden zur Verzierung angebracht. Hinzu kommt das Gestalten der Hölzer durch Schnitzen oder Bemalung. Nachfolgend sind einige bekannte Beispiele für Schmuckformen im Fachwerkbau aufgeführt.

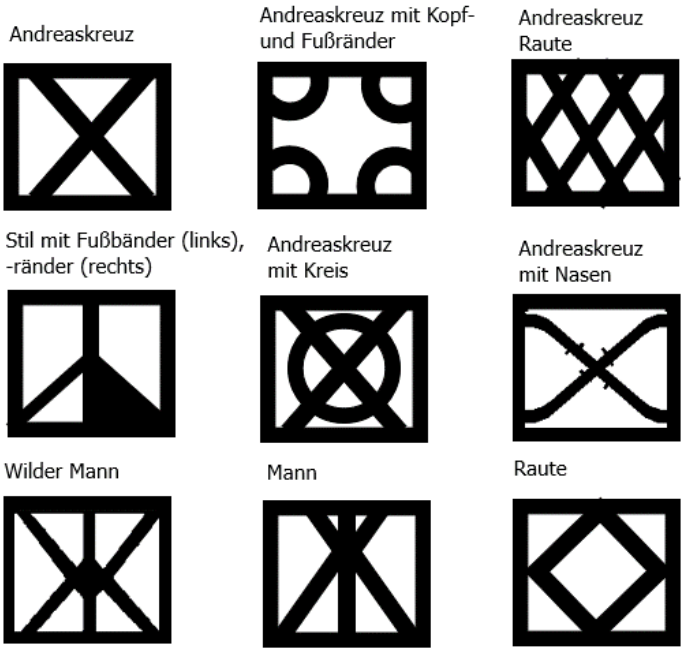


Abbildung 64: Schmuckformen im Fachwerkbau

(angelehnt an: http://www.nickolai.de/Lichtenberg/fachwerkbau.html, https://baubeaver.de/fachwerkhaus/)

Türen- und Fenstermaße

Türen- und Fenstermaße orientieren sich an dem sogenannten oktametrischen Maßsystem. Dieses beruht auf dem Modul 12,5 cm und umfasst im Mauerwerksbau somit die Breite eines Mauersteins inklusive einer Fuge von 1 cm. Weicht die Größe von Fenster- und Türöffnungen von diesem Öffnungsmaß ab, so entstehen teure Kosten durch Sonderanfertigungen.

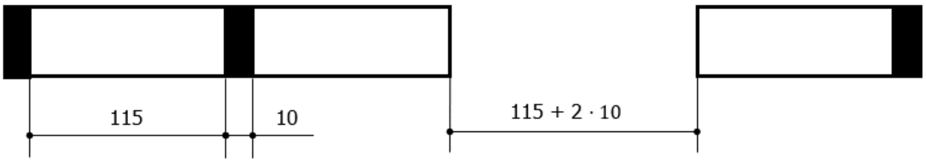


Abbildung 65: Das oktametrische Maßsystem

Da an jede Öffnung theoretisch ein Backstein anschließt, muss die Öffnungsgröße immer ein Vielfaches der Mauersteinbreite von 115 mm, einschließlich der zwei angrenzenden Fugen von 10 mm sein. Mit Hilfe dieser Formel kann man die Öffnungsgrößen einfach berechnen:

$X = S \cdot 125 + 1$	X = Öffnungsbreite [mm] S = Anzahl der Mauersteine []

Das Richtfest

Werden alle Fachwerkwände inklusive der Dachkonstruktion zusammengefügt, darf das Richtfest nicht fehlen. Hier werden zum einen die am Bau Beteiligten gelobt und zum anderen beschwört man das Glück für das zukünftige Gebäude.

Exkurs: Konstruktion eines Fachwerkcarports

8. Festigkeitslehre

Wenn mit Hilfe der Statik die Auflagerkräfte bekannt sind, muss noch nachgewiesen werden, dass der ausgewählte Werkstoff und die Form des Körpers diesen Kräften auch standhalten können. Mittels der Festigkeitslehre werden so ganze Maschinen und einzelne Bauteile bemessen. Hierzu zählen zum Beispiel die Untersuchung von Formveränderungen und die passende Wahl des Werkstoffs, des Querschnitts und der Abmessungen.

8.1 Die mechanische Spannung

Die mechanische Spannung entsteht durch die Einwirkung von Kräften auf die Oberfläche eines Körpers. Um die Beanspruchung des Bauteils besser untersuchen zu können, betrachtet man diejenige innere Kraft, die von einer Fläche von 1 mm² übertragen werden muss. Die Spannung wird mit dem griechischen Kleinbuchstaben σ (gesprochen: Sigma) abgekürzt.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$\sigma = \text{Spannung}\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right]$

$F = \text{Kraft [N]}$

$A = \text{Querschnittsfläche}\ [\text{mm}^2]$

Muskelspannung

Auch Muskeln können eine Spannung erzeugen und dadurch Kräfte auf unsere Knochen übertragen. Durch Kontraktion der Muskulatur kommt so zum Beispiel eine Bewegung zustande. Selbst wenn man nur sitzt, liegt eine Grundspannung vor, die den Körper in der gewünschten Position hält.

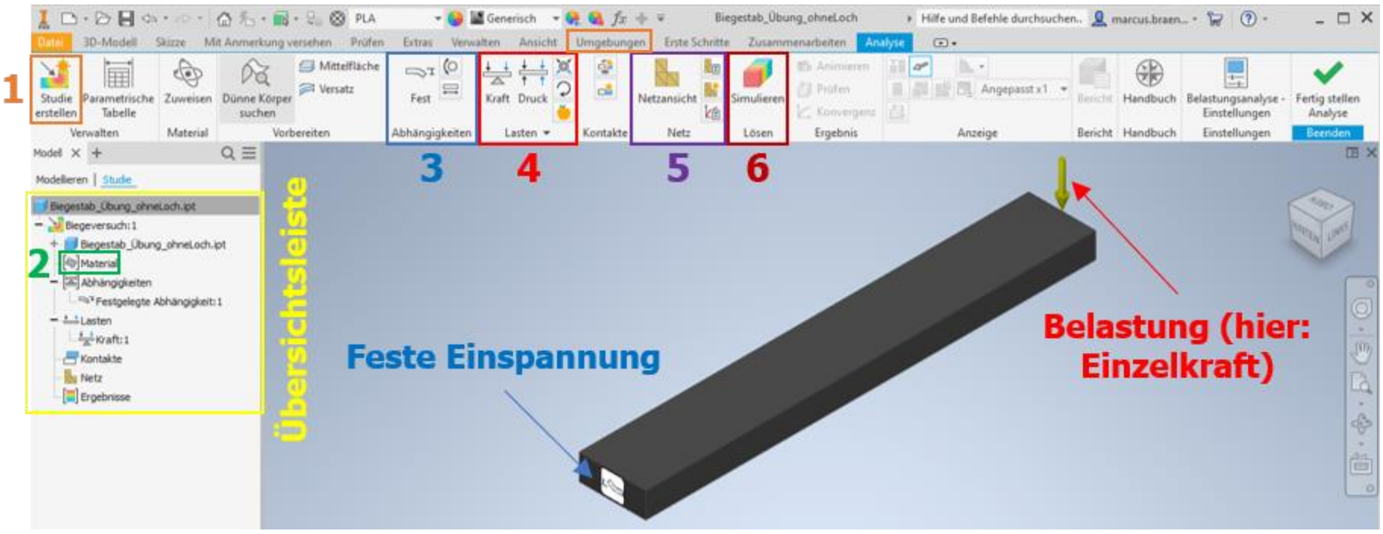
8.2 Finite-Elemente-Methode (FEM)

Die Spannung in einem Bauteil kann durch Simulationen sichtbar gemacht werden. Viele CAD-Programme bedienen sich heute der Finite-Elemente-Methode (FEM), mittels derer man Verformungsuntersuchungen an einem Bauteil vornehmen kann. Unter Krafteinwirkung können Spannungen somit direkt simuliert werden. Hierbei wird das zu berechnende Gebiet in viele endliche kleine Teilgebiete mit einfacher Form aufgeteilt, die dann über mathematische Methoden berechnet werden können.

Die Methode wird heutzutage in fast allen Ingenieurwissenschaften benutzt und spart aufwändige Crashtests und komplizierte Festigkeitsberechnungen.

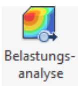
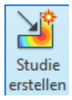
Nachfolgend ist eine kurze Anleitung zur Durchführung der FEM-Analyse mit dem CAD Programm Autodesk Inventor Professional 2020 für eine Simulation eines Biegeversuchs mit fester Einspannung aufgeführt. Bevor man mit der Analyse beginnen kann, muss das 3D-Bauteil, das spannungstechnisch untersucht werden soll, als Datei geöffnet bzw. konstruiert werden.

FEM-Analyse mit Autodesk Inventor Professional 2020:



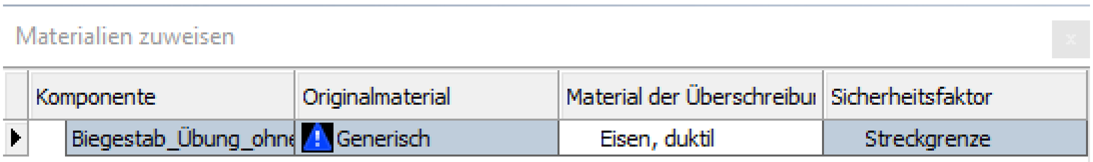
(Screenshot aus: Autodesk Inventor Professional 2020)

1. Zunächst wird die **Umgebung** gewechselt:

   Umgebungen → Belastungsanalyse  → Studie erstellen 

   Hier kann man den Namen der Simulation eingeben und mit „OK" bestätigen.

2. Anschließend wird das **Material** des Bauteils festgelegt:
   Doppelklick auf Material in der **Übersichtsleiste**
   → In dem Feld „Material der Überschreibung" wird das gewünschte Material ausgewählt.



Materialien zuweisen

	Komponente	Originalmaterial	Material der Überschreibu	Sicherheitsfaktor
▶	Biegestab_Übung_ohne	Generisch	Eisen, duktil	Streckgrenze

Zusätzlich wird noch der „Sicherheitsfaktor" ausgewählt:
Sicherheitsfaktor → Pfeil nach unten → Streckgrenze oder Bruchspannung

3. Als nächstes werden die **Abhängigkeiten** definiert. Hier kann man die Bewegungen des Bauteils in die gewünschten Richtungen verhindern, also die Lagerung festlegen.

   Zunächst wählt man hierzu eine der 3 Abhängigkeiten (fest, verankern, reibungslos) aus. Danach klickt man auf den Teil des Bauteils, der so gelagert werden soll und bestätigt die Auswahl mit „anwenden". Das entsprechende Symbol wird an die Seite des Bauteils angebracht.

4. Anschließend kann die gewünschte **Last** festgelegt werden. Es gibt hier eine große Auswahl an Belastungsarten:

   - Zug- oder Druckkraft (Kraft, Druck)
   - Drehmomente
   - Schwerkraft
   - usw.

   Außerdem kann zwischen einer Punkt- und Flächenlast unterschieden werden.

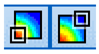
   Es wird nun die gewünschte Belastung ($1\ \mathrm{MPa} = 1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$) ausgewählt und ein Wert für die Kraft eingegeben. Anschließend klickt man auf die zu belastende Fläche. Die Last wird mit Hilfe von Pfeilen an dem Bauteil angezeigt.

5. Die **Netzansicht** (Netzansicht) zeigt das Netz auf dem Modell an, um die Netzdichte besser zu erkennen. Für komplexere Flächen des Körpers kann die Netzdichte erhöht werden.

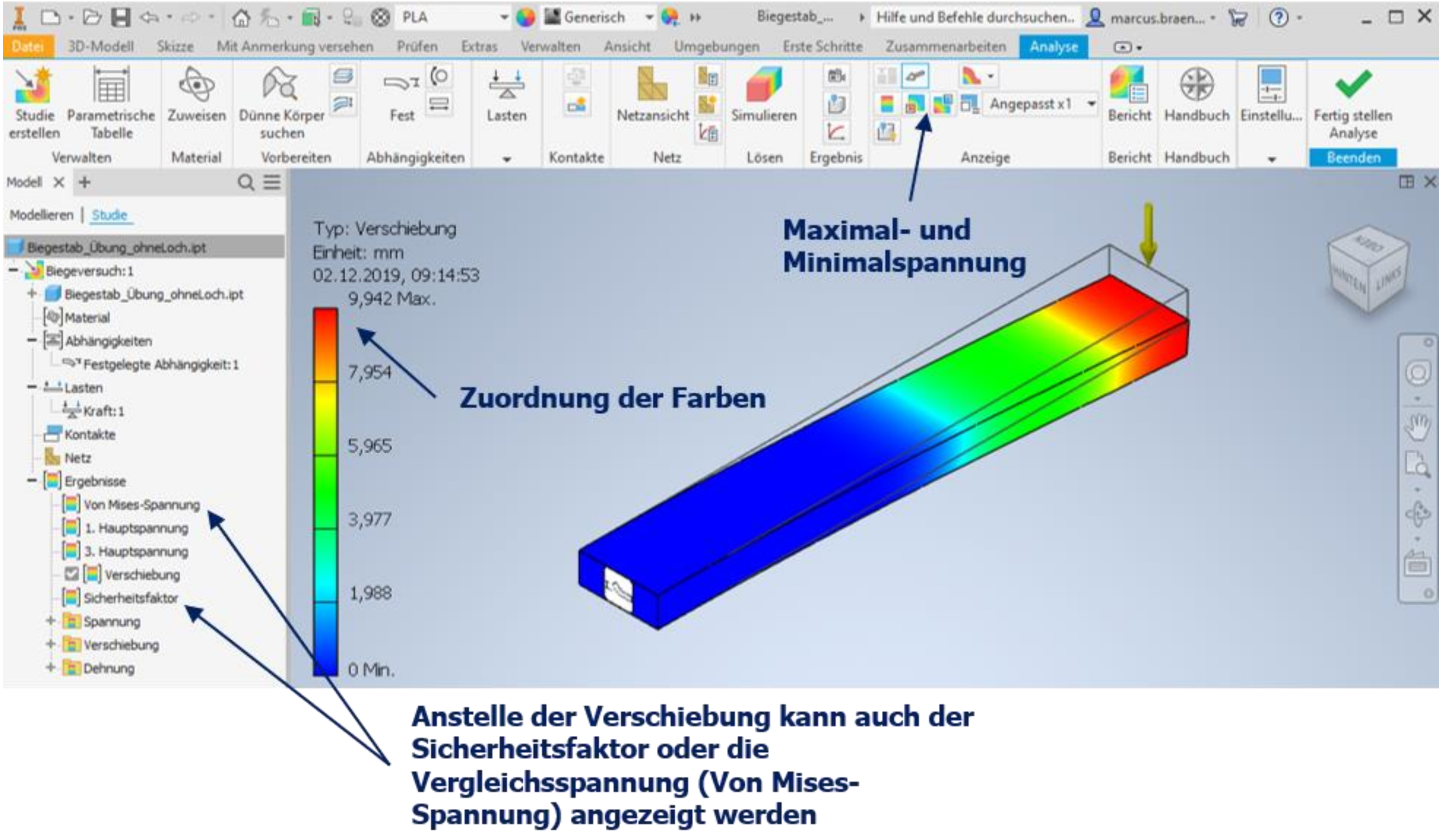
6. Jetzt kann es mit der Simulation (Simulieren) losgehen:
   Simulieren → Ausführen

Tipp 1: Bleibt man mit dem Mauszeiger länger auf einem Button, so zeigt das Programm automatisch die Informationen darüber an.

Tipp 2: Alle Angaben, die festgelegt wurden, sind in dem linken Übersichtsfeld ersichtlich (linker Pfeil muss nach unten zeigen) und können hier durch einen Rechtsklick auf die Einstellung angezeigt und auch wieder gelöscht werden.

1. Abschließend erfolgt die Auswertung der FEM-Analyse:
   - Wichtig ist vor allem, an welchen Stellen das Bauteil am stärksten belastet wird. Die Stellen mit der stärksten Belastung kann man sich unter Betrachtung der Maximal- und Minimalspannung anzeigen lassen. 
   - Rot steht für eine hohe Spannung und blau für eine niedrige Spannung.
   - Die Übersichtsleiste enthält neben dem Spannungsverlauf noch die Möglichkeit, sich unter anderem die Verschiebung [mm] oder die Dehnung [-] anzeigen zu lassen. Auch hier ermittelt das Programm die Maximal- und Minimalwerte.
   - Die roten Bereiche stellen Schwachstellen an dem Bauteil dar. Hier sollte man sich bei zu hohen Spannungen Optimierungsansätze überlegen.

Hilfe für die Auswertung kann dem nachfolgenden Screenshot entnommen werden:



(Screenshot aus: Autodesk Inventor Professional 2020)

Blatt 8-1: Finite-Elemente-Methode (FEM-Analyse)

8.3 Spannungsarten

Je nachdem in welche Richtung eine Kraft wirkt, unterscheidet man zwischen der Normal- und der Tangentialspannung (auch Schubspannung genannt). Die **Normalspannung** wirkt senkrecht zur Querschnittsebene des Körpers, also in Richtung der Längsachse. Die **Tangentialspannung** wirkt dagegen parallel zur Querschnittsebene. Beide resultieren aus einer Normal- bzw. Querkraft.

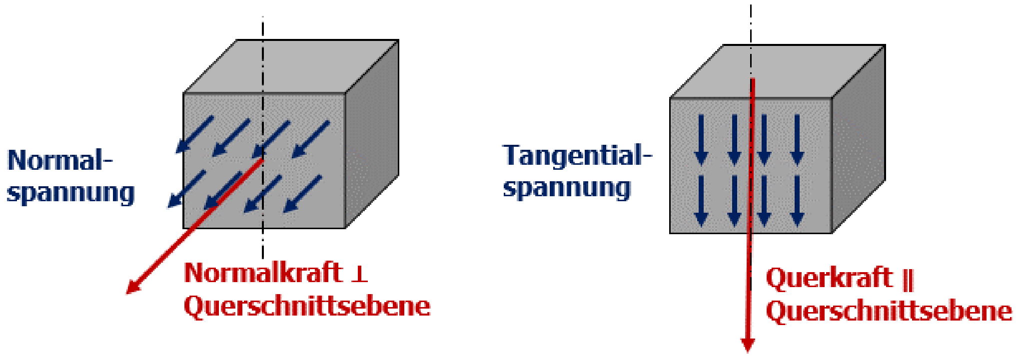


Abbildung 66: Normal- und Tangentialspannung
(angelehnt an Böge, A. 1990 S. 219)

In diesem Kapitel wird ausschließlich die Normalspannung σ behandelt. Diese lässt sich weiter unterteilen in die Normalkraft und das Biegemoment. Es folgen weitere Unterteilungen u. a. in unterschiedliche Spannungsarten, die der nachfolgenden Abbildung zu entnehmen sind.

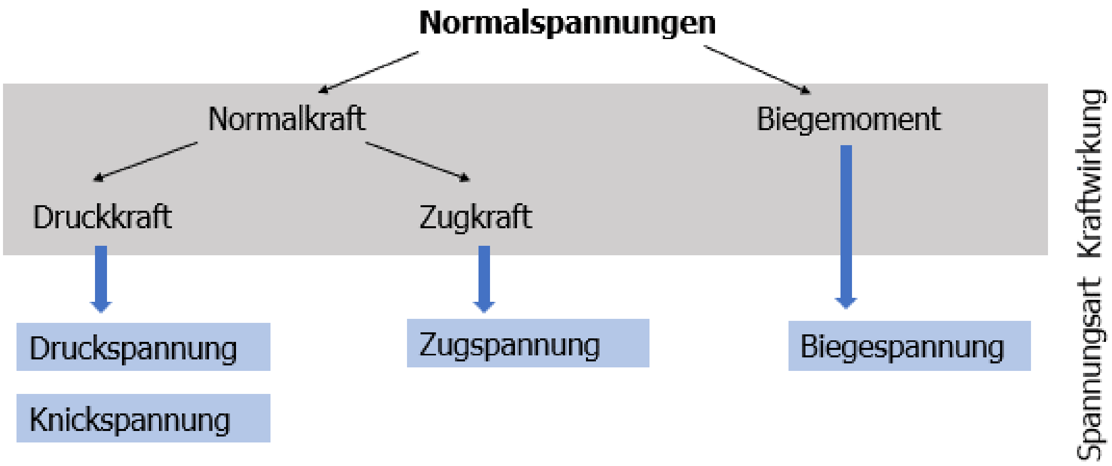


Abbildung 67: Unterteilung der Normalspannung

Auf die unterschiedlichen Spannungsarten wird näher in den nachfolgenden Abschnitten eingegangen. Zuvor folgt eine Einführung in die Dehnung, um die Grundlagen hierfür zu legen.

8.4 Die Dehnung

Die Dehnung ε (gesprochen: Epsilon) stellt eine relative Längenänderung ohne Einheit dar.

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

ε = Dehnung []
Δl = Längenänderung (gesprochen: Delta l) [m]
l_0 = Ursprungslänge [m]

Die Längenänderung Δl berechnet sich aus der im gespannten Zustand vorhandenen Länge l abzüglich der Ursprungslänge l_0:

$$\Delta l = l - l_0$$

Oft wird die Dehnung auch in Prozent angegeben. Dann muss das Ergebnis zusätzlich mit 100 multipliziert werden.

Bei der Dehnung wird unterschieden zwischen:
- der **elastischen Dehnung**, bei der Werkstücke nach dem Entlasten wieder ihre ursprüngliche Form annehmen
- und der **plastischen Dehnung**, bei der nach der Entlastung eine Verformung erhalten bleibt.

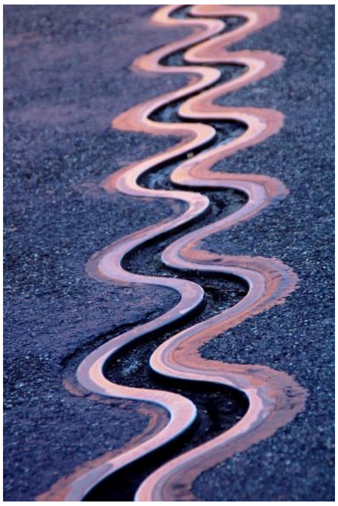


Abbildung 68: Dehnungsfuge auf einer Brücke

Auch beim Erwärmen kann sich ein Festkörper ausdehnen. Diese Wärmedehnung muss in der Konstruktion berücksichtigt werden. Bei der Auffahrt auf eine Brücke gibt es eine bemerkbare kleine Unebenheit. Der Grund dafür ist, dass die Brücke nicht fest mit der Umgebung verbunden ist, sondern eine Dehnungsfuge enthält, so dass sie sich im Sommer aufgrund der Wärmeeinwirkung verlängern kann.

8.5 Spannungs-Dehnungs-Diagramme

Zur Auswahl eines geeigneten Konstruktionswerkstoffs oder auch bei der Qualitätssicherung werden Zugversuche mit genormten Probenformen des zu prüfenden Materials durchgeführt. Zugversuche für Metalle sind z. B. nach DIN EN ISO 6892-1:2009 genormt. Auf Basis der erhaltenen Prüfkennwerte kann eine Einschätzung der Werkstoffeignung oder der Qualität erfolgen. Bei der Auswahl von geeigneten Konstruktionswerkstoffen ist zudem zu beachten, dass sich duktile und spröde Werkstoffe bei Spannungs- und Dehnungseinwirkung unterschiedlich verhalten.

In der Festigkeitslehre wird unterschieden zwischen:

- **duktilen** Werkstoffen (bspw. Baustähle), bei denen Monolagen im Kristall in Zugrichtung abgleiten können. Dadurch fließt der Werkstoff bei hoher Zugbelastung und verengt sich (Einschnürung) an der Stelle der maximalen Spannung, bevor er bricht.
- und **spröden** Werkstoffen (bspw. Gusseisen, keramische Werkstoffe), in denen aufgrund ihrer Werkstoffbeschaffenheit kein Abgleiten der Monolagen im Kristall möglich ist. Die Probe trennt sich ohne eine Strukturänderung innerhalb der Monolagen und ohne Einschnürung in einem geraden Bruch.

Die Belastung der Proben während des Prüfvorgangs wird in Spannungs-Dehnungs-Diagrammen aufgezeichnet, die für den jeweiligen Werkstoff charakteristisch sind.

Als Messwerte und zugleich wichtigste Materialkennwerte erhält man bei Zugversuchen E-Modul E, Streckgrenze R_e und Zugfestigkeit R_m, die im Spannungs- Dehnungsdiagramm dargestellt sind (siehe Abbildung 70).

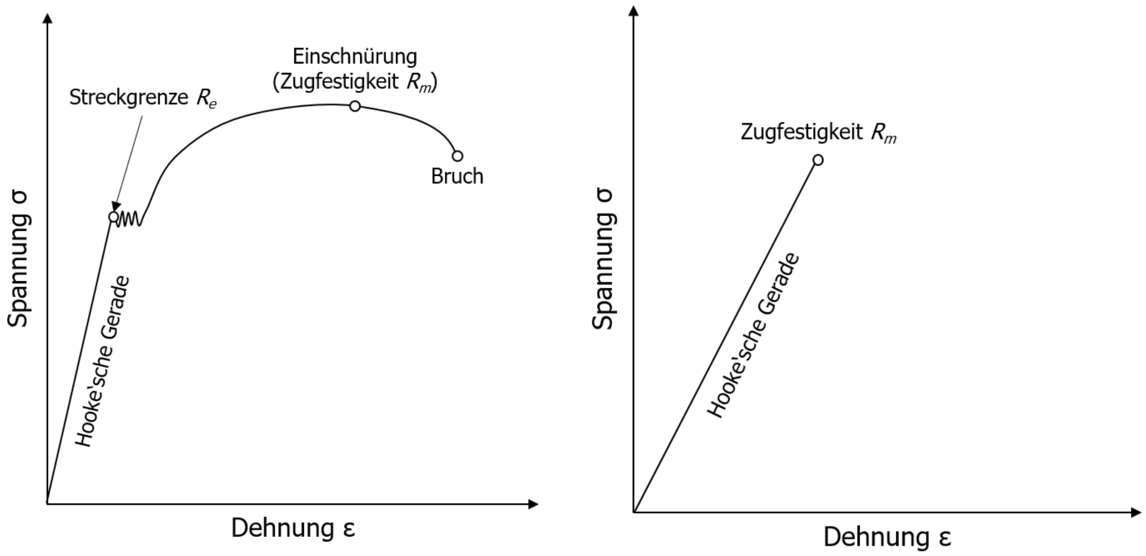


Abbildung 69: Spannungs-Dehnungs-Diagramme für metallische Werkstoffe
(links = duktiler Werkstoff, rechts = spröder Werkstoff).

Im Bereich der Hookeschen Geraden befindet sich ein metallischer Werkstoff in seinem elastischen Dehnbereich. Am Ende der Hookeschen Geraden gehen duktile metallische Werkstoffe vom linear elastischen Bereich in den plastischen Bereich über, das heißt sie beginnen zu „fließen". Die Längenänderung im Werkstoff ist jetzt nicht mehr reversibel. Der Werkstoff ist zwar noch nicht an seiner Versagensgrenze angelangt, erfährt jedoch bereits eine bleibende Dehnung.

Spröde metallische Werkstoffe weisen aufgrund ihrer Materialzusammensetzung keinen plastischen Verformungsbereich (Fließbereich) und somit keine Streckgrenze auf. Wird die Belastung für den linear elastischen Bereich überschritten, bricht der Werkstoff ohne Einschnürung direkt am Punkt seiner maximalen Zugfestigkeit.

Da die Mehrzahl der Konstruktionswerkstoffe duktile Metalle sind, werden diese im Folgenden ausführlicher betrachtet.

Innerhalb der Werkstoffgruppe der duktilen Metalle erfolgt eine Einteilung in zwei Gruppen:

1. Metalle ohne ausgeprägte Streckgrenze, wie z. B. legierte und unvergütete Stähle, Aluminiumlegierungen und Temperguss (Abbildung 70707071).
2. Metalle mit ausgeprägter Streckgrenze, wie z. B. unlegierte Stähle mit niedrigem Kohlenstoffgehalt (Abbildung 71717172).

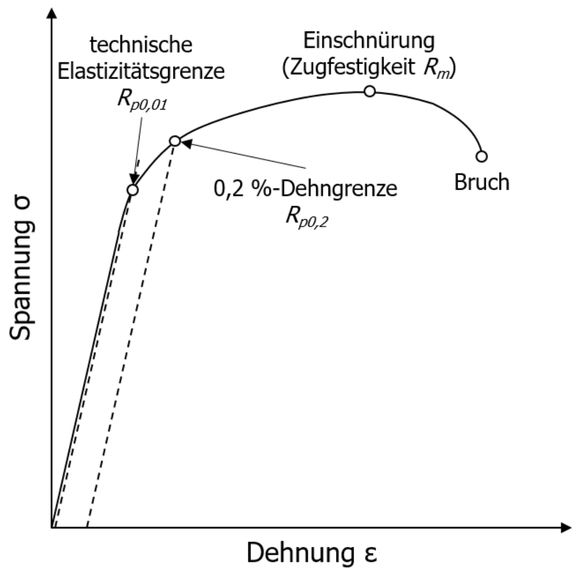


Abbildung 70: Duktiler Werkstoff ohne ausgeprägte Streckgrenze

Als Ersatzwert kann bei Werkstoffen ohne ausgeprägte Streckgrenze R_e die technische Elastizitätsgrenze $R_{p0,01}$ verwendet werden. Diese wird außerdem als 0,01 % - Dehngrenze bezeichnet und beschreibt die Spannung, die bei einem Werkstoff nach Entlastung eine irreversible Dehnung von 0,01 % der Ursprungslänge hinterlässt. In der Praxis wird jedoch häufig die 0,2 % Dehngrenze $R_{p0,2}$ als Kennwert für den Beginn einer maßgeblich ausgeprägten plastischen Verformung verwendet.

Die Kennwerte können aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm über Parallelen zur Hookeschen Geraden über die zugrunde gelegte Dehnung entsprechend ermittelt werden (siehe Abbildung 70707071).

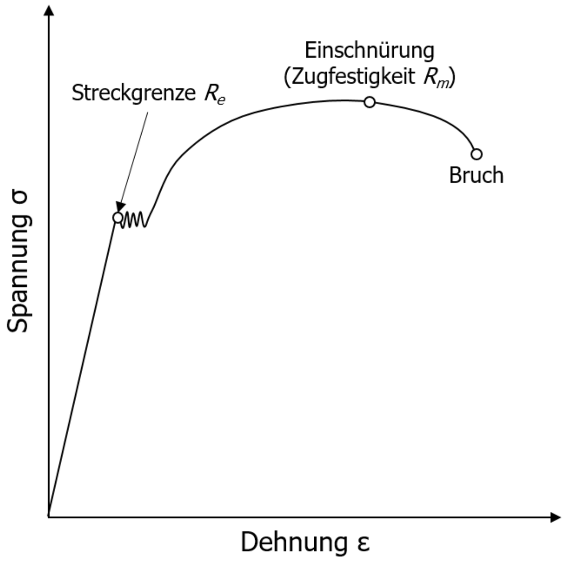


Abbildung 71: Duktiler Werkstoff mit ausgeprägter Streckgrenze

Bei einigen normalgeglühten, unlegierten Stählen, wie z.B. Baustähle nach DIN EN 10025-2, wird am Ende des linear elastischen Bereichs ein Punkt starker Dehnung unter nahezu gleichbleibender Zugbeanspruchung (Lüders-Dehnung) des Werkstoffs erreicht. Den Beginn dieses Fließbereichs markiert die Streckgrenze R_e (siehe Abbildung 71717172).

Für beide Gruppen duktiler Werkstoffe beginnt nach dem Überschreiten der Streck- bzw. 0,01 %-Dehngrenze der plastische Fließbereich. Bis zu einem Maximum im Kurvenverlauf dehnt sich die Probe ohne Einfluss auf ihren Querschnitt (Gleichmaßdehnung). Dieses Maximum wird als Zugfestigkeit R_m bezeichnet. An diesem Punkt beginnt sich die Probe am schwächsten Punkt einzuschnüren. Im Bereich der Einschnürung konzentriert sich fortan die gesamte Kraft, sodass sich der tragende Querschnitt weiter verringert. Damit sinkt die ertragbare Kraft F der Probe und somit ebenfalls die Spannung σ.

Dieser Kurvenverlauf wird rein von den Messbedingungen verursacht, da sich die Berechnung der Spannung über die gesamte Messung am Anfangsquerschnitt A_0 der Probe orientiert. Die wahre Spannung im Einschnürquerschnitt nimmt natürlich solange zu, bis der Restquerschnitt der Beanspruchung nicht mehr standhalten kann und die Probe bricht.

Blatt 8-2: Spannungs-Dehnungs-Diagramme

8.6 Das Hookesche Gesetz

Der englische Physiker Robert Hooke (1635-1703) entwickelte ein Gesetz für die elastische Verformung fester Körper. Dieses Gesetz lässt sich einfach in einem Gedankenexperiment nachvollziehen: zieht man an einem Gummifaden, dann stellt man fest, dass mit zunehmender Dehnung (Verlängerung Δl) auch die Spannung (Kraft) im Faden zunimmt. Zieht man doppelt so stark an dem Faden, verdoppelt sich die Spannung und auch die Längenänderung.

> Nach dem Hookeschen Gesetz ist die Dehnung ε proportional zur Spannung σ bzw. der wirkenden Kraft F.

Würde man diesen Versuch mit einem anderen Werkstoff durchführen, so beobachtet man, dass die Spannung zwar weiterhin proportional zu der Längenänderung wächst, jedoch in einem anderen Verhältnis wie bei dem Gummifaden. Das Verhältnis von Dehnung und Spannung ist somit für jeden Werkstoff anders und spiegelt sich in dem sogenannten Elastizitätsmodul wider.

> Der Elastizitätsmodul, kurz E-Modul, ist eine Materialkonstante. Er gibt die Zugspannung an, bei der ein Werkstoff eine Dehnung von 100 % erreichen würde. Je größer der Zahlenwert ist, desto höher ist die Zugfestigkeit des Werkstoffes.

Mit diesem Wissen kann man nun das Verhältnis von Dehnung und Spannung in einer Gleichung wiedergeben:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

$\sigma =$ Spannung $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right]$

$\varepsilon =$ Dehnung []

$E =$ Elastizitätsmodul $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right]$

Zu beachten ist allerdings, dass diese Gleichung nur im elastischen Bereich gilt. Einige Beispielswerte für den E-Modul gibt Tabelle 14 wieder.

Tabelle 14: E-Module bekannter Werkstoffe (angelehnt an Müller, K. 2002, S. 23)

Werkstoff/Baustoff	**E-Modul** $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right]$
Baustahl, Stahlguss, Betonstahl	210.000
Grauguss, Gusseisen	100.000
Aluminium	70.000
Glas	60.000
Eichenholz, parallel zur Faser	125.000

Blatt 8-3: Das Hookesche Gesetz

8.7 Zugbeanspruchung

Ziehen die äußeren Kräfte in Richtung der Bauteilachse, so spricht man von einer Zugbeanspruchung des Bauteils. Die Folge ist eine Verlängerung (Dehnung) des Körpers. Bei einer Zugspannung stehen die inneren Kräfte senkrecht auf der Schnittfläche.

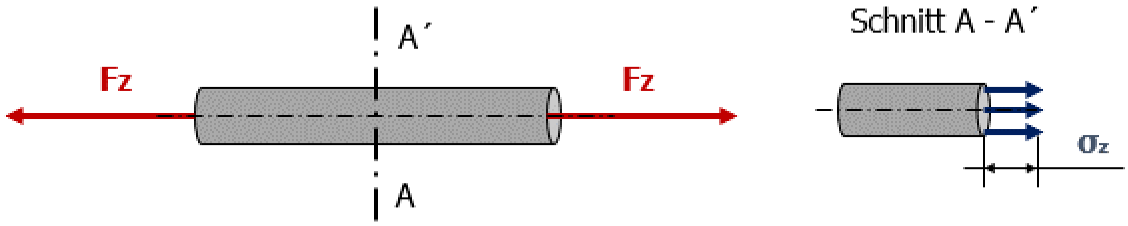


Abbildung 72: Zugbeanspruchung

Für die Zugspannung gilt bei gleichbleibendem Querschnitt:

$$\sigma_Z = \frac{F_Z}{A}$$

$\sigma_z =$ Zugspannung $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right]$

$F_Z =$ Zugkraft [N]

$A =$ Querschnittsfläche $[\mathrm{mm}^2]$

Beispiele für eine Zugbeanspruchung sind Seile, Anker oder Zugstäbe in Fachwerken.

8.8 Druckbeanspruchung

Drücken die äußeren Kräfte in Richtung der Stabachse, spricht man von einer Druckbeanspruchung. Die Folge ist eine Verkürzung des Körpers. Wie bei der Zugbeanspruchung stehen die inneren Kräfte senkrecht auf der Schnittfläche.

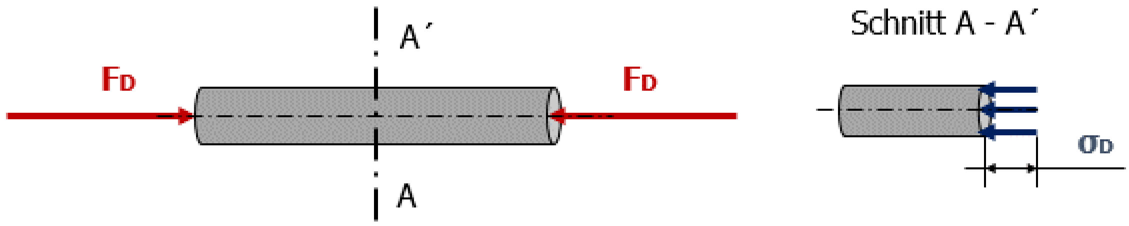


Abbildung 73: Druckbeanspruchung

In allen Bauwerken werden Bauteile auf Druck beansprucht. Beispiele dafür sind Säulen und Druckstäbe. Ihre Aufgabe ist es, die Lasten der Decke aufzunehmen und sie in den Untergrund zu leiten. Hierbei wird zwischen gedrungenen und schlanken Bauteilen unterschieden.

Abbildung 74: Druckbeanspruchung eines Balkens

Für die Druckspannung gilt:

$$\sigma_D = -\frac{F_D}{A}$$

$\sigma_D =$ Druckspannung $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$

$F_D =$ Druckkraft [N]

$A =$ Querschnittsfläche $[mm^2]$

Blatt 8-4: Zug- und Druckbeanspruchung

8.9 Knickung

Abbildung 75: Knickgefährdete Bauteile

Insbesondere schlanke Stäbe neigen dazu bei einer zentrischen Druckbelastung plötzlich zu Knicken, ohne davor die Materialfestigkeit überschritten zu haben. Das ist ein Sonderfall der Druckbeanspruchung, der in Form von Mauerpfeilern oder Stützen häufig in der Statik vorkommt und daher explizit behandelt werden muss. Das Knicken ist nicht vorhersehbar und tritt ohne Vorankündigung ein. Es wird durch ein auftretendes Biegemoment in dem Stab ausgelöst und führt zu einem schlagartigen Bauteilversagen.

Die Knickkraft F_K wird als Kraft definiert, bei der das Knicken eines Stabes beginnt. Analog zu der Zug- und Druckspannung gilt für die Knickspannung:

$$\sigma_K = \frac{F_K}{A}$$

σ_K = Knickspannung $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$

F_K = Knickkraft [N]

A = Querschnittsfläche [mm^2]

Natürlich darf diese Größe in der Praxis niemals erreicht werden. Die vorhandene Druckspannung σ_D muss daher immer unter der Knickspannung bleiben.

$$\sigma_D \leq \sigma_K$$

Die Knicklast F_K ist von vier Faktoren abhängig:

1. **Der Stabgeometrie (Länge):** Sind alle anderen Faktoren gleich, so ist eine kürzere Stütze gegen Knicken stabiler als eine längere Stütze.

2. **Der Querschnittsform:** Sind die Querschnittsfläche und die weiteren Faktoren konstant, so sind manche Querschnittsformen stabiler als andere. Ein quadratischer Querschnitt ist zum Beispiel weniger knickgefährdet als ein rechteckiger.

3. **Der Einspannung:** Der Einfluss der Einspannung wird in Tabelle 15 näher erläutert.

4. **Dem Werkstoff (Elastizitätsmodul):** Je höher das Elastizitätsmodul, desto höher ist die Steifigkeit des Werkstoffs gegen Verformungen.

Die allgemeine Gleichung für die Knickkraft lautet:

$$F_K = \frac{E \cdot I \cdot \pi^2}{(s_K)^2}$$

E = Elastizitätsmodul $[\frac{N}{mm^2}]$

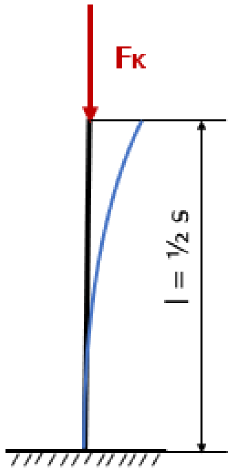
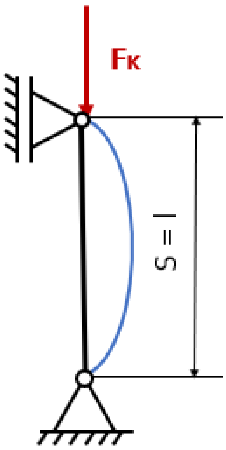
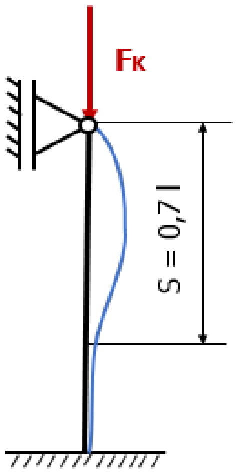
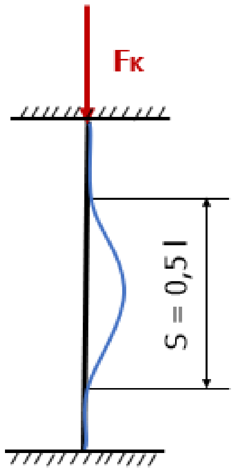
I = axiales Flächenmoment [mm^4]

s_k = freie Knicklänge [mm]

l = Stablänge [mm]

Die Festigkeit kann insbesondere durch die Führungsverhältnisse des Stabes verändert werden. Dafür hat Euler (1707-1783) abhängig von der Stablagerung vier Gleichungen für die Knickkraft entwickelt, die sogenannten Eulerfälle. Diese sind in Tabelle 15 mit den Knickbiegelinien dargestellt. Die Knicklänge s_k stellt die Länge dar, bei der sich der Stab verbiegt.

Tabelle 15: Euler´sche Knickfälle (angelehnt an Skript Festigkeitslehre)

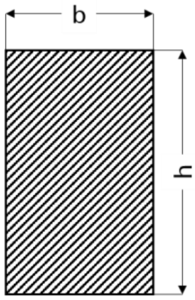
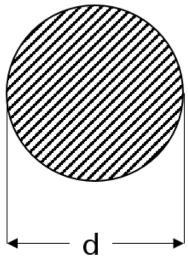
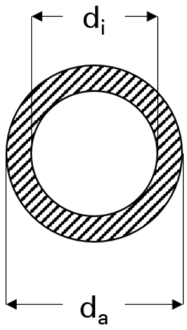
Knickfall 1	**Knickfall 2**	**Knickfall 3**	**Knickfall 4**
			
$s_K = 2l$	$s_K = l$	$s_K = 0{,}7l$	$s_K = 0{,}5l$
$F_K = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$	$F_K = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$	$F_K = 2\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$	$F_K = 4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$

Wie das Hookesche Gesetz, gelten die oben dargestellten Gleichungen allerdings nur unterhalb der Proportionalitätsgrenze des Werkstoffs.

Das axiale Flächenmoment I wird auch als Flächenträgheitsmoment bezeichnet und hängt nur von dem Querschnitt des Bauteils ab. Es gibt den Widerstand eines Bauteils gegen Biegung an. In Tabelle 16 sind die Flächenmomente für gängige Querschnitte aufgeführt.

Das axiale Flächenmoment I bezieht sich auf die Biegung um eine Achse und wird in der Regel durch einen Index (bspw. x, y oder z) ergänzt. I_y bezeichnet also das axiale Flächenmoment für die Biegung des Querschnitts um die y-Achse. Flächenmomente dürfen bei zusammengesetzten Bauteilen addiert oder subtrahiert werden, wenn sie sich auf denselben Schwerpunkt und dieselbe Achse beziehen.

Tabelle 16: Übersicht der Flächenträgheitsmomente gängiger Querschnitte bei Biegung. Flächenträgheitsmomente werden für die Verformungsberechnung verwendet

	Rechteck	Kreis	Kreisring
Querschnittsgeometrie			
Axiales Flächenmoment	$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$	$I = \frac{\pi}{64} \cdot d^4$	$I = \frac{\pi}{64} \cdot (d_a^4 - d_i^4)$

Der Eulerfall 2 kommt in der Praxis häufig vor. Ein anschauliches Beispiel dafür sind die Pendelstützen bei Geschossbauten. Das kann man sich wie folgt vorstellen:

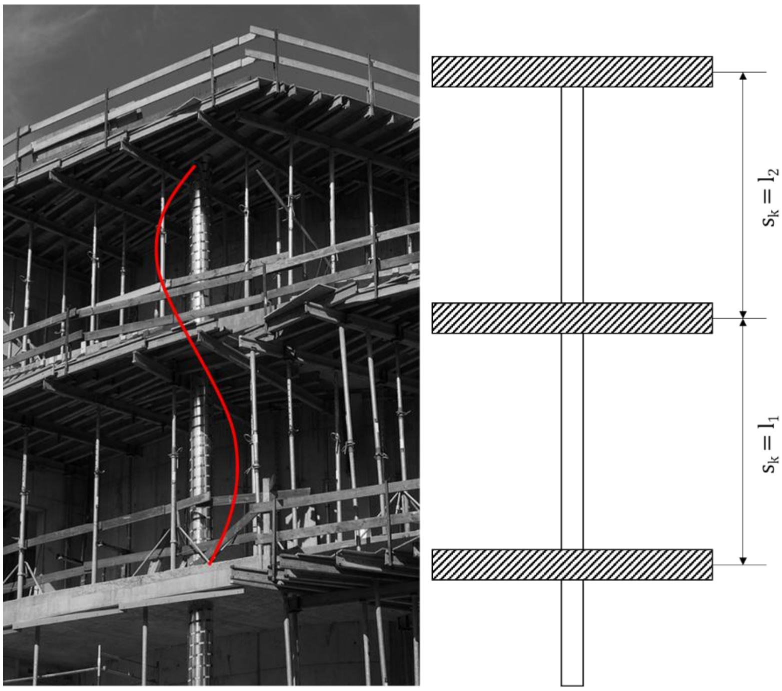


Abbildung 76: Praxisbeispiel Knickfall 2

Blatt 8-5: Bitte nicht geknickt sein

8.10 Biegebeanspruchung

Wird die schon mehrfach betrachtete Balkenbrücke senkrecht zu ihrer Achse belastet, so biegt sie sich in die jeweilige Richtung durch.

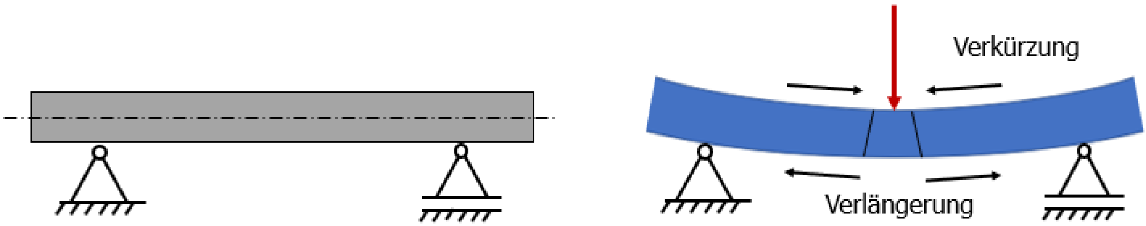


Abbildung 77: Durchbiegung eines Biegeträgers (links unbelastet, rechts belastet)

Die Folge ist eine Verlängerung des unteren Trägerrandes (eine positive Dehnung) und eine gleichzeitige Verkürzung (negative Dehnung) des oberen Trägerrandes.

Betrachtet man die Spannungsverteilung an einem einzelnen Balkenelement genauer, so erkennt man, dass bei der verkürzten Seite des Balkens eine Druckspannung herrscht und bei der verlängerten Seite eine Zugspannung. Die Spannungen sind immer an den Rändern am höchsten. Auch hier gilt das Hookesche Gesetz.

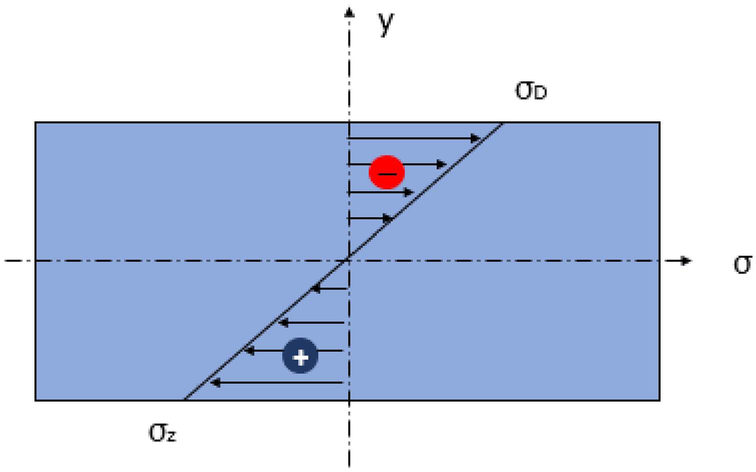


Abbildung 78: Spannungsverteilung an einem Biegebalken
(angelehnt an Skript Festigkeitslehre, S. 14)

Die Balkenachse ist dagegen spannungslos und wird daher auch als **neutrale Faser** oder **Nulllinie** bezeichnet.

Die gleichzeitig herrschende Zug- und Druckspannung an der Querschnittsstelle entsteht durch ein Biegemoment. Die daraus resultierende Spannung bezeichnet man als Biegespannung σ_B.

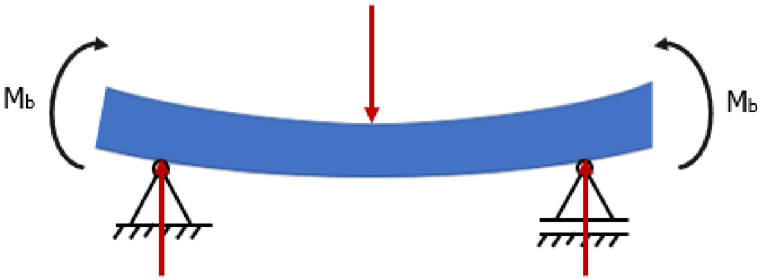
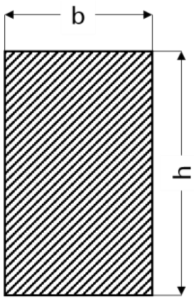
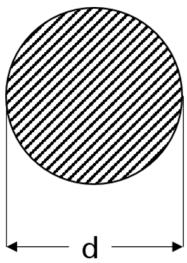
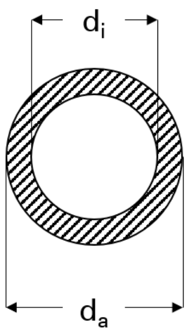


Abbildung 79: Biegeträger mit Biegemoment

Im Gegensatz zur Zug- und Druckspannung ist die Biegespannung nicht nur von der Querschnittsfläche A und der wirkenden Kraft abhängig. Beispielsweise kann man hierzu einen Biegeversuch mit einem flachen Brett betrachten: wird es flach liegend belastet, so ist die Biegung deutlich größer, als wenn es hochkant belastet wird. Hieraus können wir folgern, dass die Biegespannung auch von der Lage und Form des beanspruchten Körpers abhängig ist. Diese Größen werden im Widerstandsmoment in Tabelle 17 repräsentiert.

Tabelle 17: Übersicht der Widerstandsmomente gegen Biegung gängiger Querschnitte. Widerstandsmomente werden für die Spannungsberechnung verwendet

	Rechteck	**Kreis**	**Kreisring**
Querschnittsgeometrie			
Widerstandsmoment gegen Biegung	$W_b = \frac{b \cdot h^2}{6}$	$W_b = \frac{\pi}{32} \cdot d^3$	$W_b = \frac{\pi}{32} \cdot \left(\frac{d_a^4 - d_i^4}{d_a}\right)$

Das Widerstandsmoment W_b hängt allein von der Form, Lage und Größe des Querschnittes ab. Es gibt an, welchen Widerstand der Querschnitt unter Biegebelastung der größten herrschenden Spannung im Bauteil entgegensetzt. Widerstandsmomente in zusammengesetzten Bauteilen dürfen nicht addiert werden.

Die Gleichung für die Biegespannung lautet somit:

$$\sigma_\mathrm{B} = \frac{M_\mathrm{b}}{W_b}$$

$\sigma_\mathrm{B} = \text{Biegespannung} \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right]$

$M_\mathrm{b} = \text{Biegemoment [Nm]}$

$W_b = \text{Widerstandsmoment gegen Biegung } [\mathrm{cm}^3]$

Um herauszufinden, wie sehr sich ein Balken unter Beanspruchung biegt, kann seine Biegelinie berechnet werden. Der relevanteste Punkt ist der Ort mit der maximalen Durchbiegung w_{max}. In unserem Fall betrachten wir in Abbildung 80808081 einen fest eingespannten Balken, der mit einer Kraft F am freien Ende belastet wird.

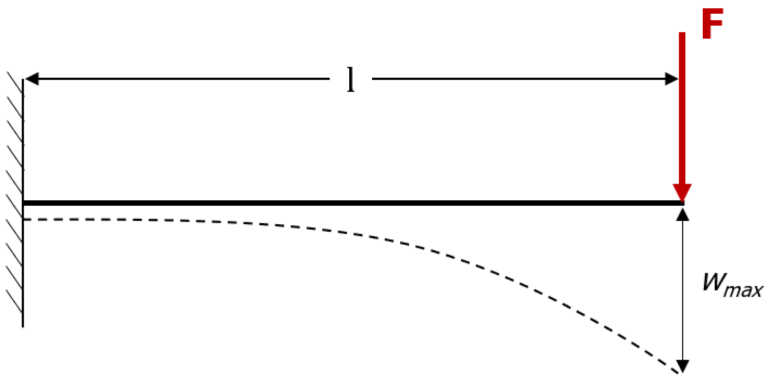


Abbildung 80: Fest eingespannter Balken unter Biegebeanspruchung mit Belastung am freien Ende

Die Berechnung der maximalen Durchbiegung wird mit der nachfolgenden Gleichung vorgenommen.

$$w_{max} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

w_{max} = maximale Durchbiegung [mm]

F = Kraft am Ort der maximalen Durchbiegung [N]

l = Länge des Balkens [mm]

I = axiales Flächenmoment [mm^4]

E = Elastizitätsmodul $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$

Blatt 8-6: Auf Biegen und Brechen

Blatt 8-7: Bewehrungen, die sich bewährt haben

8.11 Festigkeitsberechnung

Die Festigkeitsberechnung gewährleistet, dass die Beanspruchung eines Bauteils immer mit einem bestimmten Sicherheitsabstand unterhalb der Tragfähigkeit des jeweiligen Bauteils bleibt. Alle wichtigen Festigkeitswerte sind entsprechenden Kennwerttabellen zu entnehmen.

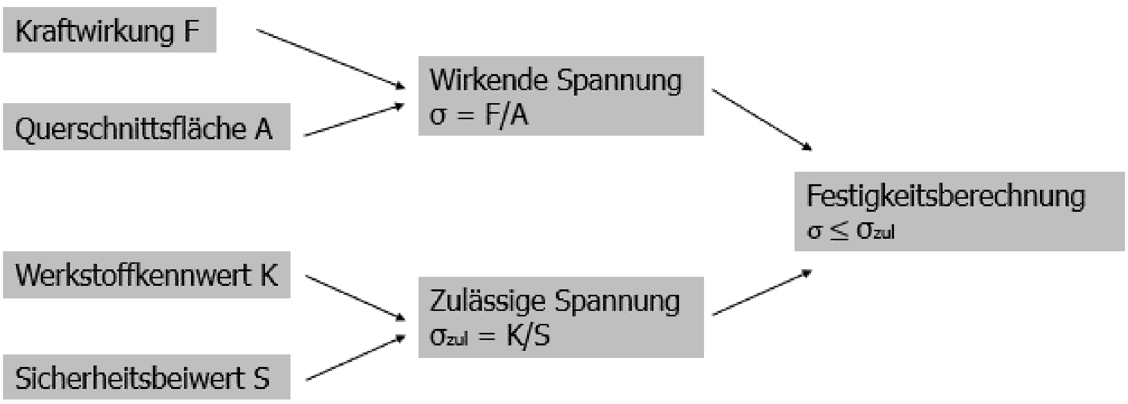


Abbildung 81: Schema Festigkeitsberechnung
(angelehnt an Skript Festigkeitslehre)

Die Grundaufgabe der Festigkeitslehre ist somit, die wirkende Spannung auf ein Bauteil zu berechnen, und zu kontrollieren, ob diese unter der zulässigen Spannung liegt:

$$\sigma \leq \sigma_{zul}$$

$$\frac{F}{A} \leq \frac{K}{S}$$

Andersherum kann natürlich auch die maximale Kraft, mit der ein Bauteil belastet werden darf, aus der zulässigen Spannung berechnet werden. Werden diese Anforderungen nicht erfüllt, kann das je nach Werkstoff zum Fließen oder zum Bruch des Bauteils führen. Die Höhe des Sicherheitswerts kann, je nach Folgen im Versagensfall und Gefährdungspotenzial beim Erreichen der Grenzbeanspruchung, angepasst werden. Die typischen Sicherheitskennwerte gegen Fließen und Bruch sind in Tabelle 18 aufgelistet.

Tabelle 18: Sicherheitswerte gegen Fließen und Bruch für duktile und spröde Werkstoffe (angelehnt an Skript Festigkeitslehre)

Werkstoffeigenschaft	**Versagensart**	**relevanter Werkstoffkennwert (K)**	**Typischer Sicherheitsbeiwert ν**
duktil	Fließen	R_e bzw. $R_{p0,2}$	$\nu_F = 1{,}5$
duktil	Bruch	R_m	$\nu_B = 2{,}0$
spröde	Bruch	R_m	$\nu_B = 4{,}0$
zäh/spröde	Knicken	F_K	$\nu_K = 3{,}5$

Mit dem Sicherheitswert ν können Unsicherheiten in der Festigkeitsberechnung kompensiert werden. Mögliche Unsicherheiten sind Lastannahmen (Schwankungen oder Unterschiede zwischen Berechnung und tatsächlicher Last), Werkstoffkennwerte (Unterschiede in der Werkstoffbeschaffenheit gegenüber der Idealannahme oder fehlerhafte Werkstoffe) und die Spannungsberechnung durch Idealisierung der Bauteilgeometrie.

Die Festigkeitsberechnung – ein „Kochrezept" der Festigkeitslehre

Die Festigkeitsberechnung erfolgt stets nach demselben Prinzip und kann anhand nachfolgender Schritte vorgenommen werden. Die Festigkeitsberechnung muss für duktile Werkstoffe immer gegen Fließen und Bruch mit dem entsprechenden Sicherheitswert vorgenommen werden. Bei spröden Werkstoffen entfällt die Betrachtung gegen Fließen.

In der Beispielrechnung wird ein auf Zug belasteter Balken aus S 235 Baustahl mit R_e = 235 MPa und R_m = 470 MPa untersucht.

1. Aufstellen der allgemeinen Festigkeitsbedingung

Allgemeine Festigkeitsbedingung gegen Fließen $\quad \sigma_{Z,F} \leq \sigma_{Z,zul,F} \rightarrow \frac{F_Z}{A} \leq \frac{R_e}{\nu_F}$

Allgemeine Festigkeitsbedingung gegen Bruch $\quad \sigma_{Z,B} \leq \sigma_{Z,zul,B} \rightarrow \frac{F_Z}{A} \leq \frac{R_m}{\nu_B}$

2. Berechnung der zulässigen Spannung

Diese erfolgt anhand der Sicherheitsbeiwerte und den relevanten Werkstoffkennwerten von S. 235.

Maximal zulässige Zugspannung gegen Fließen $\quad \sigma_{Z,zul,F} = \frac{235\ \mathrm{MPa}}{1{,}5} = 157\ \mathrm{MPa}$

Maximal zulässige Zugspannung gegen Bruch $\quad \sigma_{Z,zul,B} = \frac{470\ \mathrm{MPa}}{2} = 235\ \mathrm{MPa}$

Mit den gewählten Sicherheitswerten ergibt sich als kleinerer Wert die maximal zulässige Zugspannung gegen Fließen. Diese darf im Belastungsfall nicht überschritten werden.

3. Ermittlung gewünschter Werte und Prüfung der Dimensionierung

Über die ermittelte maximal zulässige Zugspannung kann nun beispielsweise eine bereits erfolgte Dimensionierung überprüft werden. Unter der Annahme, dass die Querschnittsfläche des Balkens $A = 10\ \text{cm}^2 = 1000\ \text{mm}^2$ beträgt und er mit einer Kraft $F = 150\ \text{kN} = 150.000\ \text{N}$ belastet ist, ergibt sich folgender Fall:

$$\sigma_Z = \frac{150.000\ \text{N}}{1000\ \text{mm}^2} = 150\ \text{MPa} \rightarrow 150\ \text{MPa}\ \leq 157\ \text{MPa}$$

Der Balken ist nach den aufgestellten Festigkeitsbedingungen mit der geforderten Sicherheit gut dimensioniert. Eine andere Möglichkeit, die sich mit der ermittelten maximal zulässigen Zugspannung und der Kraft $F = 150\ \text{kN}$ bietet, ist die Ermittlung des Bauteilquerschnitts bzw. des Bauteilradius eines Rundprofils für eine Stütze. Es gilt:

$$\sigma_{Z,max} = \sigma_{Z,zul}$$

$$\frac{F}{\pi \cdot r^2} = 157\ \text{MPa} \rightarrow r = \sqrt{\frac{F}{\pi \cdot 157 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}}$$

$$r = \sqrt{\frac{150.000\ \text{N}}{\pi \cdot 157 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}} = 17{,}44\ \text{mm} \rightarrow d \approx 35\ \text{mm}$$

Um die geforderte Kraft mit dem Gewählten Material S 235 aufzunehmen, muss die Stütze in etwa mit einem Durchmesser von 35 mm ausgelegt werden. Genauso könnte eine Maximalkraft F_{max} für einen geforderten Querschnitt berechnet oder umgekehrt aus einem Belastungsfall, mit der geforderten Sicherheit, ein geeignetes Material ausgewählt werden.

Blatt 8-8: Festigkeitsberechnung

Exkurs: Leichtbau aus dem 3D-Drucker?

Um Zeit und Material zu sparen, werden beim 3D-Druck Bauteile meistens nicht massiv gefertigt. Gibt man für Druck des Bauteils einen bestimmten Ausfüllungsgrad an, fertigt der 3D-Drucker eine Netzstruktur in das Innere des Bauteils. In Abbildung 82828283 ist exemplarisch ein Ausfüllungsgrad von 20 % schematisch dargestellt.

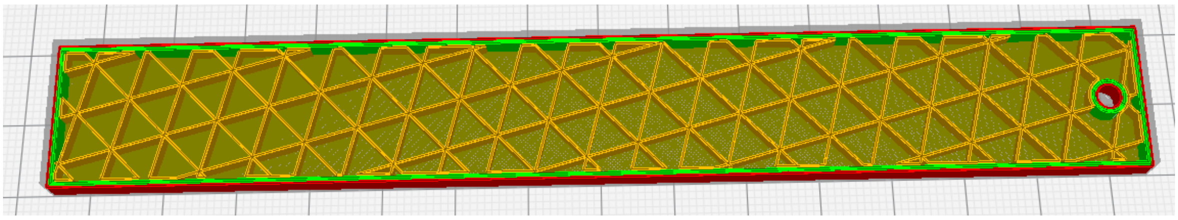


Abbildung 82: Darstellung der Infill-Struktur eines Bauteils mit 20 % Ausfüllungsgrad

Im Vergleich zum Materialverbrauch eines identischen massiven Bauteils lassen sich bei 20 % Ausfüllungsgrad fast 50 % an Kunststofffilament und Bauteilgewicht einsparen. Die Fertigungszeit sinkt von 6,5 h auf 3 h.

Ein zeit- und materialeffizienter Leichtbau? Im Prinzip schon, allerdings sollte ein Leichtbauteil ein möglichst identisches statisches Verhalten im Vergleich zu einem äquivalenten Massivbauteil aufweisen. Die Struktur innerhalb des Bauteils ist deshalb so zu gestalten, dass sie die wirkenden Kräfte bestmöglich aufnehmen und ableiten kann.

Da der 3D-Drucker scheinbar willkürlich eine orthogonal zur Druckfläche angeordnete Netzstruktur auswählt, soll untersucht werden, ob die Druckposition eines Bauteils einen Einfluss auf dessen Stabilität gegen Biegung ausübt. Zur Überprüfung werden drei Balken mit identischen Maßen in unterschiedlicher Position gedruckt. Sie sollen 20 mm breit, 7,5 mm hoch sowie 150 mm lang sein und werden nach den drei dargestellten Möglichkeiten in Abbildung 83838384 ausgedruckt.

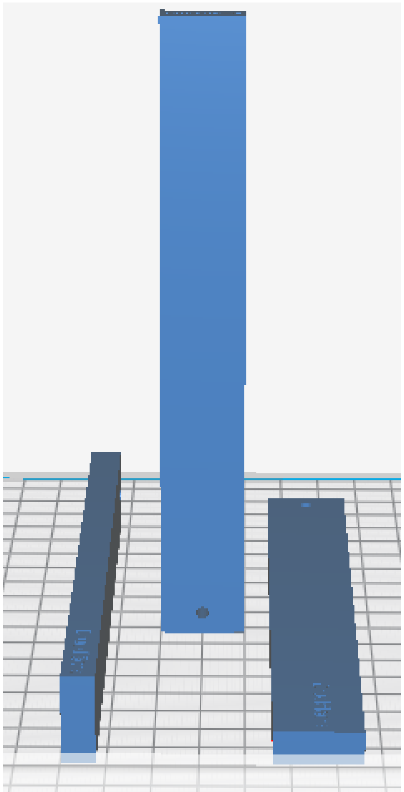


Abbildung 83: Mögliche Druckpositionen eines Biegebalkens aus dem 3D-Drucker

Zur Untersuchung des Bauteilverhaltens bei Biegung wird der nachfolgende Versuchsaufbau (Abbildung 84848485) gewählt. Dazu werden die drei unterschiedlich gedruckten Balken mit einer Schraubzwinge jeweils am Tisch fest eingespannt. Durch das Loch wird ein möglichst dünnes Garn geknotet, um einen Federkraftmesser mit mindestens 20 N einzuhängen.

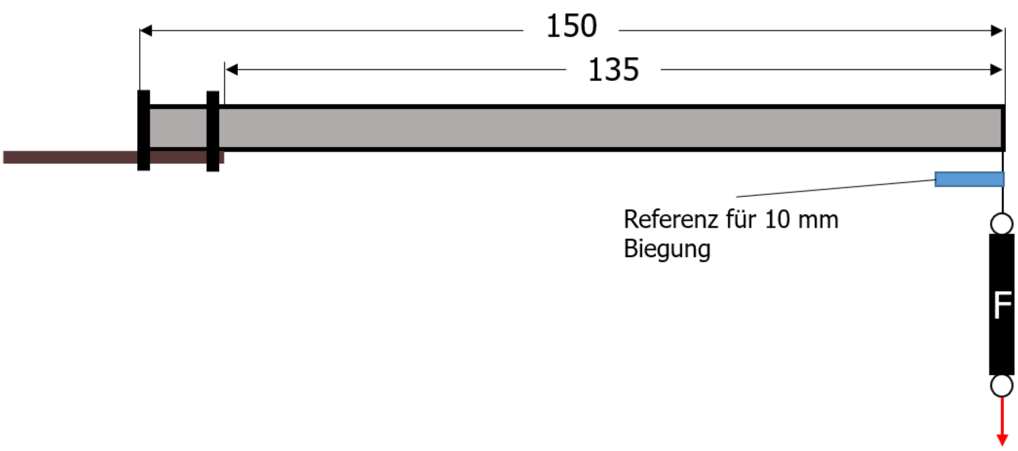


Abbildung 84: Versuchsaufbau zur Bestimmung der maximalen Durchbiegung eines Biegebalkens

Um konstante Messbedingungen zu gewährleisten, empfiehlt es sich zur Bestimmung der Durchbiegung ein Holzlineal o. Ä. als Referenzanschlag in einem Abstand von 10 mm parallel zum Balken anzubringen. Mit einem Messschieber sollte der Abstand zwischen Unterseite des Balkens und Oberseite des Lineals zunächst überprüft werden.

Die maximale Durchbiegung für einen massiven Biegebalken aus dem 3D-Drucker wurde neben der experimentellen Untersuchung zusätzlich mit einer CAD-Software simuliert. Für ein massives Bauteil aus PLA-Kunststoff ergibt sich, unter Berücksichtigung der angegebenen mechanischen Eigenschaften aus dem Datenblatt der Druckerfirma und der Einspannung des Bauteils mit einer freien Länge von 135 mm, für die maximale Durchbiegung von 10 mm nach Belastung eine Kraft von 20,33 N. Die zugehörige FEM-Analyse ist in Abbildung 85858586 dargestellt.

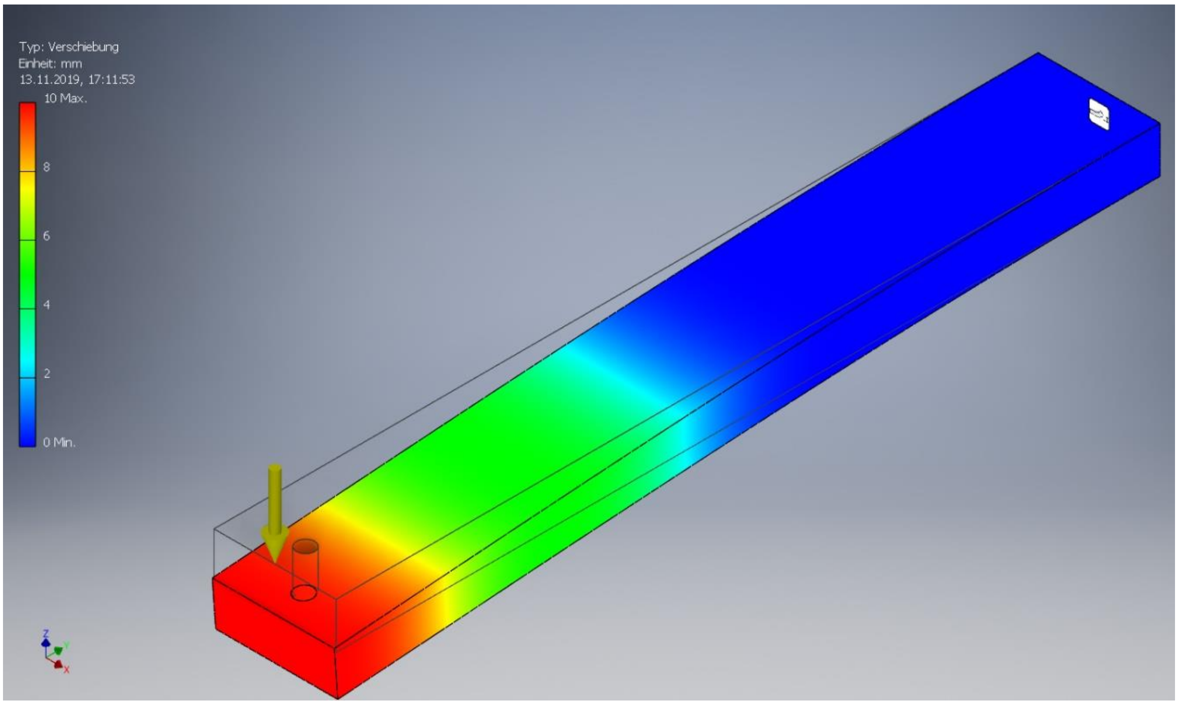


Abbildung 85: FEM-Analyse eines Biegeversuchs an einem massiven Balken aus PLA-Kunststoff für eine maximale Durchbiegung von 10 mm (Autodesk Inventor Professional 2020)

Als Referenz für die Leichtbauvariante des 3D-Druckers, wurde ein identischer Balken als Rechteck-Hohlprofil mit einer Wandstärke von 1 mm und einer formalen Ausfüllung von 20 % im 3D-CAD-Modell konstruiert und die Belastungssimulation in der CAD-Software durchgeführt. Die Simulation soll dabei einen Referenzwert für das Flächenmoment bei 20 % Ausfüllungsgrad liefern, da die Flächenmomente zusammengesetzter Bauteile addiert werden dürfen.

Unter der Annahme, dass die Summe der Flächenmomente aus infinitesimal kleinen Abschnitten des Balkens mit gleichmäßiger Gitterstruktur einen Schwerpunkt durch den Mittelpunkt des Querschnitts aufweisen, wurde zur FEM-Analyse ein Balken mit einem auf die Bauteilmitte komprimierten Infill und identischem Schwerpunkt verwendet.

Aus der Simulation in Abbildung 86868687 ergibt sich eine Kraft von 14,5 N für eine maximale Durchbiegung von 10,02 mm. Das daraus berechnete Flächenmoment ergibt sich zu I = 502,28 mm^4.

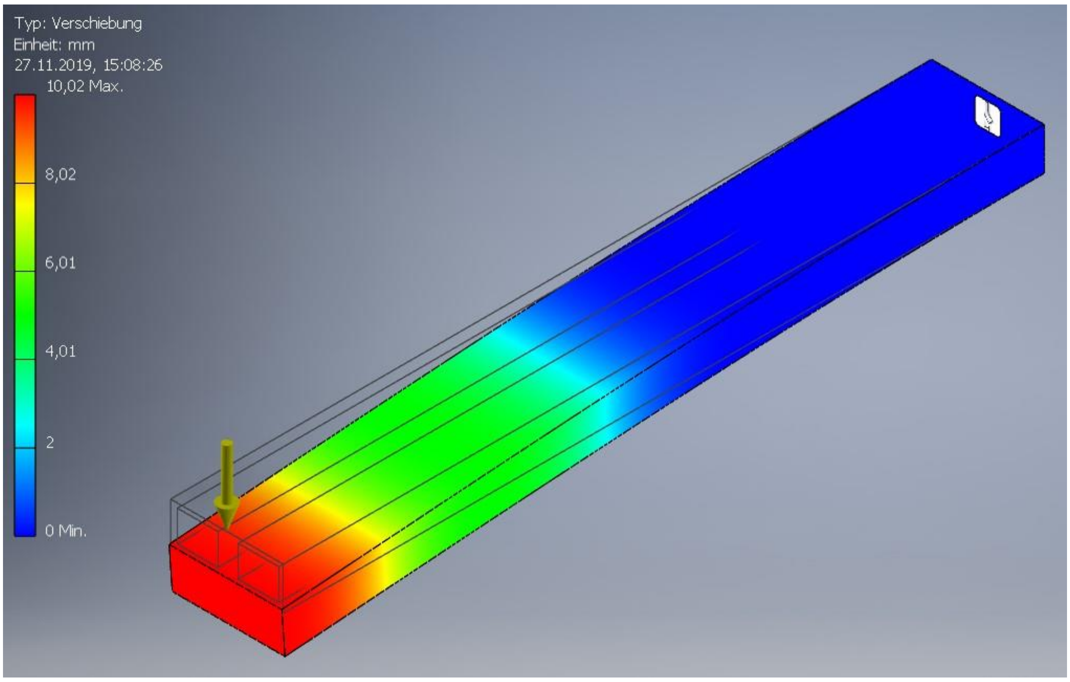


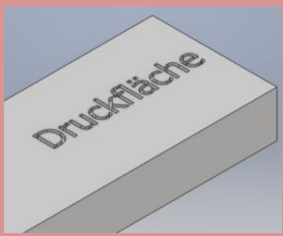
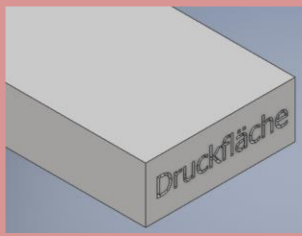
Abbildung 86: FEM-Analyse eines Biegeversuchs an einem Balken aus PLA-Kunststoff mit rechteckigem Hohlprofil und 20 % Ausfüllungsgrad mittig (Autodesk Inventor Professional 2020)

Mit dem in Abbildung 84848485 skizzierten Versuchsaufbau wurden mit jeweils fünf identischen Bauteilen jeder Druckposition Messungen vorgenommen und aus allen Messwerten der Mittelwert gebildet (siehe Tabelle 19).

Als Referenzlinie und Anschlag für die Durchbiegung dient bei diesem Versuchsaufbau ein 30 cm Holzlineal. Die Strecke der maximalen Durchbiegung w_{max} kann mit einem Messschieber mit einer Genauigkeit von 0,01 mm ermittelt werden. Die Ablesegenauigkeit der Skala des verwendeten Federkraftmessers beträgt dabei 0,5 N. Die Flächenmomente der einzelnen Querschnitte wurden mit einem E-Modul von E = 2346,5 MPa für PLA und der nach I aufgelösten Formel der maximalen Durchbiegung bei fester Einspannung berechnet.

$$I = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot w_{max} \cdot E}$$

Tabelle 19: Messergebnisse aus den Biegeversuchen mit den unterschiedlichen Bauteilen

Messung	**Breite lange Seite**  **Kraft [N]**	**Schmale lange Seite**  **Kraft [N]**	**Schmale kurze Seite**  **Kraft [N]**
Bauteil 1	15,0 N	13,0 N	12,0 N
Bauteil 2	14,0 N	14,0 N	12,0 N
Bauteil 3	14,0 N	13,5 N	12,0 N
Bauteil 4	14,5 N	13,5 N	12,5 N
Bauteil 5	14,5 N	13,5 N	13,0 N
Mittelwert $\bar{x}$	**14,4 N**	**13,5 N**	**12,3 N**
Standard-abw. **s**	**0,418**	**0,354**	**0,447**
I	**503,29 mm⁴**	**454,36 mm⁴**	**429,90 mm⁴**

Die erste Druckanordnung ergibt ein nahezu identisches Flächenmoment zur Simulation des Balkens mit 20 % Ausfüllungsgrad und ist gleichzeitig die bestmögliche Druckanordnung für das Bauteil. Das Flächenmoment des massiven Profils aus Abbildung 85858586 beträgt:

$$I = \frac{20 \text{ mm} \cdot (7{,}5 \text{ mm})^3}{12} = 703{,}13 \text{ mm}^4$$

Unser stabilstes Leichtbauteil spart 50 % Druckmaterial und 3 h Bearbeitungszeit, erfüllt aber immer noch

$$\frac{503{,}29 \text{ mm}^4}{703{,}13 \text{ mm}^4} \cdot 100 \ \% = 71{,}58 \ \%$$

des ursprünglichen Festigkeitsanspruchs.

Die geringste Biegefestigkeit entfällt auf den Balken, der senkrecht stehend ausgedruckt wurde. Vermutlich spielt hier die ungünstige Anordnung der Schichten, analog zum Faserverlauf im Holz, zusätzlich als Faktor mit hinein. Der Versuch zeigt, dass ein Bauteil, das auf Biegung belastet werden soll, am besten so auf der Druckfläche angeordnet wird, dass die Infill-Struktur senkrecht zur Biegebelastung gedruckt wird.

Exkurs: Leichtbau aus dem 3D-Drucker?

9. Dynamik

9.1 Motoren im Rennsport: Drehzahl, Drehmoment und Leistung

Abbildung 87: GreenTeam Uni Stuttgart
(https://www.greenteam-stuttgart.de/)

Das GreenTeam der Universität Stuttgart wurde im Jahr 2009 gegründet. Studierende der Studienfächer Maschinenbau, Fahrzeug- und Motorentechnik, Elektrotechnik, Kybernetik und Mechatronik wirken hier auf freiwilliger Basis mit und entwickeln einen vollständig elektrisch angetriebenen Rennwagen, mit dem sie bei weltweiten Rennen gegen andere Universitäten im Rennsport antreten - und das sehr erfolgreich! Um Näheres über das GreenTeam zu erfahren, haben wir von der Technikdidaktik des Instituts für Erziehungswissenschaft „IfE", den Teamleiter des GreenTeams „Simon", besucht und ihn einen Tag lang bei seinen täglichen Aufgaben begleitet. Simon koordiniert als Teamleiter die Entwicklung des Elektromotors – dem Kernstück des Autos - und um einen Einblick in die ingenieurwissenschaftliche Arbeit zu bekommen, haben wir ein Interview mit ihm durchgeführt.

IfE: Simon, wie lief die letzte Saison für Ihr Team?

Simon: Die Saison 2016/17 war sehr erfolgreich für das GreenTeam. Wir haben vier Podiumsplatzierungen erlangt, wodurch wir jetzt weltweit zu den besten Formula Student Elektric Teams gehören. Besonders stolz sind wir auf den Sieg hier am Hockenheimring!

IfE: Wir haben gehört, dass Sie gerade an der Entwicklung eines neuen Elektromotors für das Rennfahrzeug arbeiten. Wie geht die Arbeit damit voran?

Simon: Das ist mittlerweile schon der zweite Motor, an dem ich arbeite, da bei dem Ersten noch viele Fehler behoben werden mussten…

IFE: Woran kann man denn erkennen, ob ein Motor für ein Rennfahrzeug gut geeignet ist?

Simon: In der Fahrzeugtechnik müssen Motoren immer wieder auf ihre Funktionstüchtigkeit untersucht werden. Um bestimmte Eigenschaften reproduzierbar prüfen zu können, verwendet man daher sogenannte Prüfstände. Mit Hilfe von verschiedensten Messsystemen, Sensoren und Anwendungssoftwares können so die gesuchten Größen gemessen und ausgewertet werden.

IfE: Welche Größen spielen für die Geschwindigkeit des Fahrzeugs eine besondere Rolle? Schließlich wollen Sie ja weiterhin mit vorne dabei bleiben …

Simon: Die Drehzahl, das Drehmoment und die Leistung sind die Kennwerte, die den Vergleich von Motoren untereinander ermöglichen und daher besonders wichtig für uns sind.

9.2 Die Drehzahl

Hohe Drehzahlen spiegeln sich bei einem Autorennen durch einen brachialen Sound wieder. Nicht umsonst sollte man bei einem Formel 1 Rennen immer Kopfhörer dabeihaben. Die Drehzahl gibt die Häufigkeit der Umdrehungen in einem bestimmten Zeitabschnitt wieder.

IfE: Simon, was für eine Bedeutung hat die Drehzahl für einen Elektromotor?

Simon: Die Drehzahl steht in diesem Fall für die Drehungen der Motorwelle pro Minute. Eine höhere Drehzahl bedeutet also, dass der Motor mehr arbeiten muss und dementsprechend auch mehr Energie benötigt hat. Die Drehzahl bezieht sich dabei immer auf den kompletten umlaufenden Körper, wie zum Beispiel auf einen Elektromotorrotor.

In der Technik wird meistens die Einheit Umdrehungen pro Minute ($\frac{1}{min}$) verwendet, in der Physik werden die Umdrehungen dagegen pro Sekunde ($\frac{1}{s}$) betrachtet.

Allgemein wird die Drehzahl als Quotient aus der Zahl der Umdrehungen und einem bestimmten Zeitintervall definiert.

$$n = \frac{\Delta Z}{\Delta t}$$

$n =$ Drehzahl $\left[\frac{1}{\mathrm{min}}\right]$

$\Delta Z =$ Zahl der Umdrehungen

$\Delta t =$ Zeitintervall

Außerdem stellt die Drehzahl den Kehrwert der Umlaufdauer dar:

$$n = \frac{1}{T}$$

$n =$ Drehzahl $\left[\frac{1}{\mathrm{min}}\right]$

$\mathrm{T} =$ Umlaufdauer $[\mathrm{min}]$

Mit diesen Kenntnissen lässt sich auch die Winkelgeschwindigkeit definieren. Da eine komplette Umdrehung einem Winkel von 2Π entspricht, gilt für die Winkelgeschwindigkeit:

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n = 2 \cdot \pi \cdot f$	$\omega = \text{Winkelgeschwindigkeit} \left[\frac{1}{\text{min}}\right]$ $n = \text{Drehzahl} \left[\frac{1}{\text{min}}\right]$ $f = \text{Frequenz} \left[\frac{1}{\text{min}}\right]$

Bei einer Drehbewegung entspricht die Drehzahl der Frequenz.

IfE: Kann man pauschal sagen, in welchem Bereich die Drehzahl bei einem Rennfahrzeug liegen sollte?

Simon: Je nachdem, um was für einen Antrieb es sich handelt, gibt es verschiedene Drehzahloptima. Bei einem Verbrennungsmotor ist das natürlich ganz anders als bei einem Elektromotor.

9.3 Das Drehmoment

Ein Drehmoment versetzt, wie es bereits in Kapitel 6.2 beschrieben wurde, einen Körper in Drehung. Es ist mit der Einheit Nm sozusagen das Äquivalent der Kraft, die Körper geradlinig beschleunigt.

IfE: Warum gehört gerade das Drehmoment zu einer der wichtigsten Kenngrößen?

Simon: Egal, ob es sich um einen Verbrennungsmotor oder eine Elektromaschine handelt, der Motor stellt immer an seinem Abtrieb ein Drehmoment zur Verfügung. Dieses Drehmoment hängt wiederrum von der Drehzahl ab. Fakt ist für einen Rennwagen: Je größer das Drehmoment, umso mehr Power hat ein Antrieb.

9.4 Die Leistung

IfE: Wie schnell kann das Elektrorennfahrzeug derzeit dann maximal fahren?

Simon: Mit dem alten Motor waren es so um die 120-130 km/h. An den neuen Motor habe ich etwas höhere Erwartungen…

Die Leistung stellt den Quotienten aus der verrichteten Arbeit W (die Arbeit ist wiederum das Produkt aus Kraft und Strecke $W = F \cdot s$) und der dafür erforderlichen Zeit t dar.

$P = \frac{W}{t}$	$P =$ Leistung $[1 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1 \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}} = 1\ \mathrm{W}]$ $W =$ Arbeit $[\mathrm{J} = \mathrm{Nm}]$ $t =$ Zeit $[\mathrm{s}]$

IfE: Was bedeutet die Leistung praktisch für ein Rennauto?

Simon: Auf den Motor bezogen bedeutet dies: je höher die Drehzahl eines Autos, desto höher ist die abrufbare Leistung und damit auch die Beschleunigung, beispielsweise bei einem Überholmanöver. Handelt es sich um eine Motorantriebswelle, so ergibt sich die Leistung aus dem Produkt aus Drehzahl und Drehmoment.

$$P = M \cdot \omega$$

$$P = M \cdot 2 \cdot \pi \cdot n$$

$P =$ Leistung $[1 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1 \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}} = 1\ \mathrm{W}]$

$M =$ Drehmoment $[\mathrm{Nm}]$

$\omega =$ Winkelgeschwindigkeit $\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]$

$n =$ Drehzahl $\left[\frac{1}{\mathrm{s}}\right]$

Die Leistung in PS

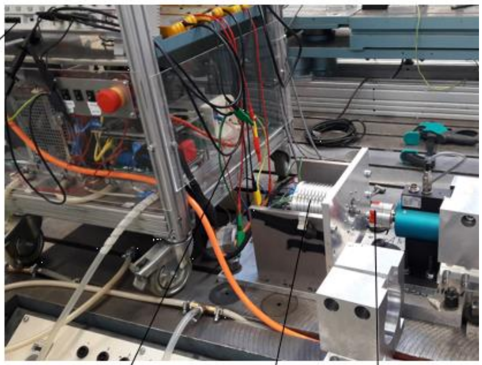
Die Leistungsangabe eines Motors erfolgt üblicherweise in PS (Pferdestärke). Der Erfinder der Dampfmaschine James Watt wollte damit eine anschauliche Einheit für die Leistung einer Dampfmaschine aufstellen und hat darunter die durchschnittliche verwendbare Leistung eines Pferdes bei der Arbeit verstanden. Die heute korrekte Einheit ist aber eigentlich das Watt. 1 Watt ist demnach die Leistung, bei der 1 J Arbeit während 1 s umgesetzt wird.

1 kW = 1,36 PS bzw. 1 PS = 0,736 kW

Simon: Am besten wir schalten hierzu mal den Prüfstand an und schauen uns dann so eine Leistungskennlinie genauer an…

Blatt 9-1: Drehzahl, Drehmoment und Leistung von Motoren

9.5 Der Motorprüfstand



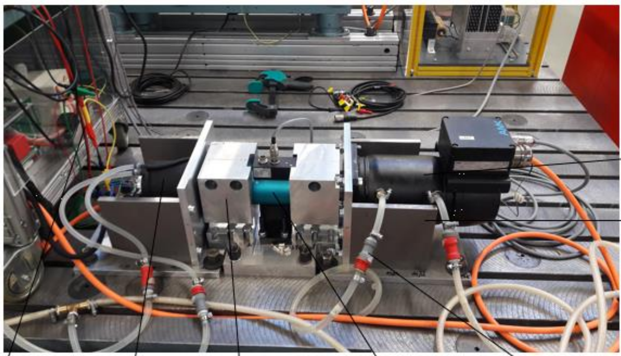


Abbildung 88: Motorprüfstand (links ohne Verkleidung, rechts mit Verkleidung)

IfE: Wie funktioniert das denn jetzt alles?

Simon: In dem Elektromotor ist ein Sensor eingebaut, der die Drehzahl misst. Über eine Kupplung wird der Elektromotor mit der Drehmomentmesswelle verbunden. Auf diese wirkt wiederum eine Last, die der Motor aufnehmen muss. Die Last kann variiert werden. Über Dehnmessstreifen in der Drehmomentwelle werden so die verschiedenen Drehmomente gemessen. Die nötige Spannung für den Elektromotor wird über ein leistungsstarkes Netzteil bereitgestellt und durch die Leistungselektronik in eine Wechselspannung umgewandelt. Alle Daten werden dann auf den PC übertragen.

IfE: Der Elektromotor sieht aber klein aus…

Simon: Haha ja, je kleiner, desto weniger Gewicht! Er wiegt gerade mal 3,5 kg, wobei der Motor des Teams in Karlsruhe sogar noch kleiner ist. Aber jetzt müssten auch die Daten fertig sein…

9.6 Die Leistungskennlinie

An einem Motorprüfstand kann gemessen werden, welche Drehzahl sich einstellt, wenn der Motor mit einem bestimmten Drehmoment belastet wird. Mit Hilfe der oben genannten Gleichung kann daraus die Leistung in Abhängigkeit der Drehzahl berechnet und in einem Diagramm dargestellt werden. Das bezeichnet man als Leistungskennlinie. Sie spiegelt die Charakteristik eines Motors wieder.

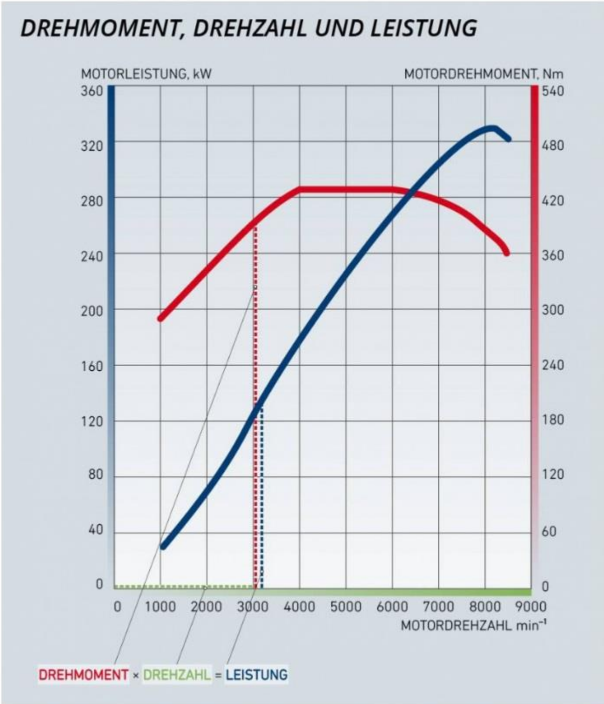


Abbildung 89: Leistungs- und Drehmomentkennlinie eines Verbrennungsmotors

(© Bild: Alessandro Holler)

IfE: Welche Charakteristika weist eine typische Elektromotorkennlinie auf?

Simon: Die Drehmomentkennlinie eines Elektro-Synchronmotors weist schon bei einer niedrigen Drehzahl ein hohes Drehmoment auf. Wenn die sogenannte Eckdrehzahl erreicht ist, fällt das Drehmoment ab. Die Eckdrehzahl ist also die Drehzahl, bei der das maximale Drehmoment gerade noch erhalten bleibt.

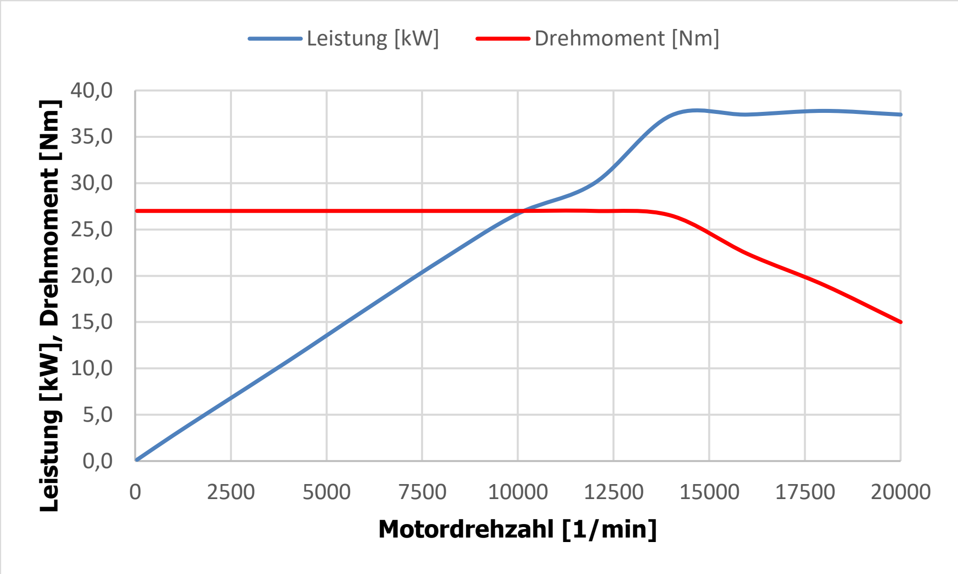


Abbildung 82: Leistungs- und Drehmomentkennlinie eines Elektromotors

Wird die Drehmomentkennlinie des Verbrennungsmotors (Ottomotor) aus Abbildung 81 mit der eines Elektromotors (Abbildung 82, Synchronmotor) verglichen, lässt sich feststellen, dass der Elektromotor von Beginn an ein hohes und konstantes Drehmoment ausübt. Der Verbrennungsmotor verzeichnet anfangs ein stetig ansteigendes Drehmoment, das in Abbildung 81 bei 4000 U/min sein Maximum erreicht und ab einer Motordrehzahl von 6000 U/min beginnt abzufallen. Die Drehmomentkennlinie des Elektromotors fällt ab 14000 U/min linear. Da sich die Drehzahl während des Drehmomentabfalls noch weiter erhöht, bleibt die Leistungskennlinie ab diesem Wert konstant. Diesen Sachverhalt erklärt die Formel in Abbildung 81.

Prinzipiell wäre bei einem Verbrennungsmotor ein stetiger Anstieg des Drehmoments mit kontinuierlich steigender Drehzahl zu erwarten. In der Praxis wird dies jedoch nicht erreicht. Bei einem Verbrennungsmotor lässt sich der Abfall des Drehmoments durch die immer höhere Kolbengeschwindigkeit erklären. Je schneller sich die Kolben bewegen, desto eher bekommt der Motor Füllungsprobleme und arbeitet dadurch unter Sauerstoffmangel. Der Kraftstoff verbrennt nicht mehr optimal und die auf den Kolben wirkende Kraft nimmt dadurch ab. Zunächst steigt die Drehzahl weiter an, was den Drehmomentabfall in gewissem Maß kompensieren kann und in einer weiteren Steigerung der Leistung resultiert. Der Gaswechsel wird dadurch zusehends schlechter, dies führt letztendlich ab 8000 U/min zu einem Leistungsabfall.

Beim Betrieb des Elektromotors ist die sogenannte Gegeninduktionsspannung der Ankerwicklung der limitierende Faktor. Bei niedriger Drehzahl ist diese Gegeninduktionsspannung gering. Dadurch kann eine hohe Stromstärke aufgenommen werden, woraus ein hohes Drehmoment resultiert. Mit steigenden Drehzahlen nimmt auch die Gegeninduktionsspannung zu. Dies führt zu einer sinkenden Aufnahme der Stromstärke und somit zu einem Abfall des Drehmoments.

9.7 Der Wirkungsgrad

IfE: Wird die Leistung des Motors dann direkt in die Bewegung umgesetzt?

Simon: Nein, leider nicht. Ein Teil der Energie geht durch die Reibung im Getriebe und so weiter verloren und wird in Wärme umgewandelt. Bei einem Elektromotor wird aber der Großteil der Energie in Bewegungsenergie umgesetzt. Der Wirkungsgrad ist bei Verbrennungsmotoren deutlich geringer.

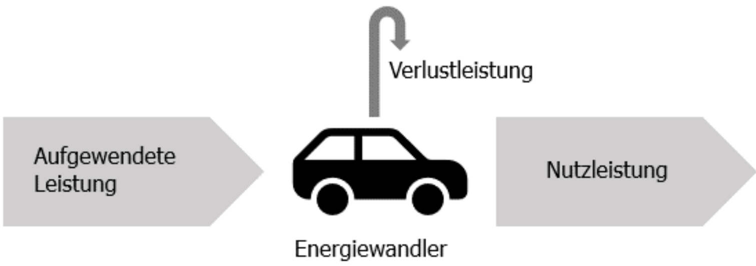


Abbildung 90: Wirkungsgrad

Technische Vorgänge sind immer mit einem gewissen Verlust verbunden. Um diesen zu beurteilen, wurde der Begriff des Wirkungsgrades eingeführt. Dieser ist das Verhältnis der Nutzleistung zur aufgewendeten Leistung.

$$\eta = \frac{P_{nutz}}{P_{auf}} < 1$$

$\eta = \text{Wirungsgrad } [\%]$

$P_{nutz} = \text{Nutzleistung } [W]$

$P_{auf} = \text{aufgewendete Leistung } [W]$

Der Wirkungsgrad zeigt also, wie effizient ein Energiewandler ist. Bei einem Elektromotor wird elektrische Energie in mechanische Energie umgewandelt. Da kein technischer Vorgang ohne den Verlust von Energie ablaufen kann, ist der Wirkungsgrad immer kleiner als 1 ($\eta < 1$).
In einem Rennwagen treten Verluste vor allem durch die Reibung auf. Wie man diese berechnet und welche verschiedenen Arten es davon gibt, ist Inhalt des nächsten Kapitels.

9.8 Verbrennungsmotor und Elektromotor im Vergleich

Vorteile von Elektromotoren im Vergleich zu Verbrennungsmotoren:

- Elektromotoren weisen einen hohen Wirkungsgrad auf (> 94 %). Verbrennungsmotoren geben einen Großteil der im Treibstoff chemisch gebundenen Energie als Wärme ab (ca. 75 %), der Rest wird in Bewegungsenergie umgewandelt.
- Aufgrund der unterbrechungsfreien Drehmomentabgabe ist keine Anfahrsynchronisation oder schaltbare Übersetzung notwendig. Dies erstreckt sich über den gesamten Geschwindigkeitsbereich.
- Geringere Größe (Abmessung) und Gewicht (Masse). Dies ermöglicht einen platzsparenden Einbau in der Nähe der Räder.
- Es entstehen keine Abgase (Emissionen) beim Betrieb.
- Aufgrund der langen Motor-Lebensdauer und der geringen Wartung sind die Betriebskosten vergleichsweise niedrig.
- Die Montage einschließlich dem Kühlsystem ist einfach.
- Ein Elektroantrieb ermöglicht die Einrichtung einer elektromotorischen Bremse, d. h. der Elektromotor wirkt beim Bremsen als Generator. Dies ermöglicht eine Energierückgewinnung der Beschleunigungsenergie. Zudem werden keinerlei Wartungsarbeiten aufgrund von Verschleiß benötigt.
- Der Energiebedarf ist geringer. In Bezug auf Motorenbenzin beträgt der Energiebedarf eines Tesla Roadster (2008) 457,2 kJ/km. Dies entspricht einem Verbrauch von 1,49 Liter Benzin auf 100 km.

Nachteile von Elektromotoren im Vergleich zu Verbrennungsmotoren:

- Noch weisen Elektromotoren mit einer Reichweite von 350 km (laut Hersteller) eine geringere Reichweite als herkömmliche Verbrennungsmotoren auf (Tesla Roadster 2008, der Tesla Roadster 2020 soll eine Reichweite von 1000 km haben).
- Langer Ladezyklus der Batterie (Lithium-Ionen-Akkus, wie sie auch in Laptops verwendet werden). Bei einer herkömmlichen 230-V-16-A-Schukosteckdose dauert ein vollständiger Ladezyklus eines Tesla Roadster (2008) etwa 24 Stunden um 56 kWh Energie zu speichern. Ein Elektrokleinwagen benötigt derzeit auf 100 km 15 – 20 kWh Energie, wobei die Ladedauer über eine normale Haushaltssteckdose sechs bis acht Stunden beträgt. Bei einem Drehstromanschluss beträgt die Zeitspanne zum Aufladen der Batterie unter zwei Stunden.
- Die Ladeinfrastruktur für öffentliche Stromtankstelle ist bislang nicht flächendeckend und unzureichend ausgebaut.
- Hinzu kommen fehlende Standards zum flächendeckenden Netzaufbau von Ladestationen (z. B. Stecker). Angedacht ist derzeit ein fünfpoliger Stecker mit einer Stromspannung von 400 V.
- Abmessung und Masse der Batterie (> 400 kg).

Exkurs: Der kleinste Elektromotor der Welt

Bau eines Elektromotors

Einfacher geht es kaum. Nur mit einem Draht, einer Batterie, einer Schraube und einem Neodym-Magnet kann man bereits einen Elektromotor innerhalb weniger Minuten bauen. Dieser wird auch Monopolar- oder Unipolarmotor genannt. So einfach funktioniert es:

1. Ein Kabel mit einer Länge von ca. 7 cm muss an beiden Seiten etwa 4 mm abisoliert werden.
2. Daraufhin setzt man einen Neodym-Magneten auf den Schraubenkopf.
3. Die Schraubenspitze wird nun an den negativen Pol (der flachen Seite) einer Batterie der Größe AA geführt.
4. Jetzt hält man ein Ende des Kabels an den positiven Batteriepol und das andere seitlich an den Magneten. Die Schraube rotiert und schon ist der Elektromotor fertig.

Funktionsweise

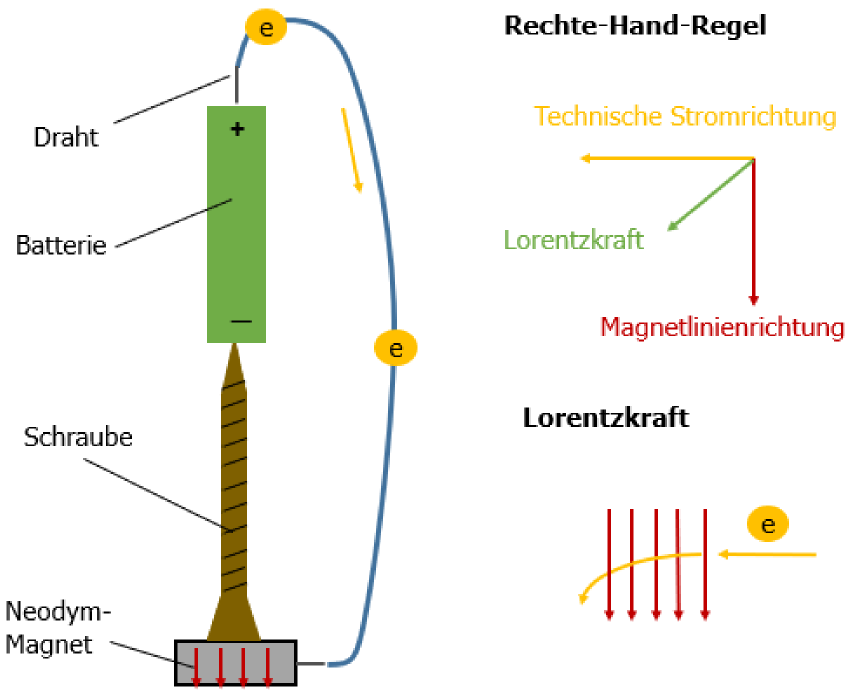


Abbildung 91: Der kleinste Elektromotor der Welt

In der Batterie wird durch den Draht ein Kurzschluss erzeugt. Dadurch fließt ein elektrischer Strom in der Schraube und in dem Magneten. Ein Strom entsteht immer durch den Transport von elektrischen Ladungsträgern wie Elektronen. Neodym-Magnete sind sehr starke Magnete, die aus einer Legierung aus Neodym, Eisen und Bor bestehen. Zwei aneinanderhaftende Neodym-Magnete sind mit bloßen Händen kaum zu trennen. Da durch den Neodym-Magneten ein starkes Magnetfeld erzeugt wird, werden die Elektronen darin durch die Lorentzkraft abgelenkt. Der Strom fließt dabei größtenteils senkrecht zu den magnetischen Feldlinien. Die Richtung dieser Kraft kann man mit Hilfe der „Rechten-Hand-Regel" für positive Ladungsträger ermitteln. Der Daumen zeigt dabei in Richtung der technischen Stromrichtung (im Gegensatz zur physikalischen Stromrichtung geht diese von plus nach minus), der Zeigefinger in Richtung des Magnetfelds und der Mittelfinger gibt die Richtung der Lorentzkraft an. Die Schraube rotiert aufgrund des 3. Newton´schen Axioms „actio = reactio", nach dem es zu einer Kraft auch immer eine Gegenkraft geben muss.

10. Reibung

Verschiebt man einen Festkörper auf einer Oberfläche, so treten Reaktionskräfte als Widerstand zwischen den Körpern auf. Diese bewegungshemmende Kraft ist der Bewegung entgegengerichtet. Man spricht hier von äußeren Reibungskräften F_R, die zwischen den Berührungsflächen von zwei Körpern bei einer Bewegung auftreten. Aus der Erfahrung weiß man, dass die Bewegung zur Ruhe kommt, wenn nicht ständig eine antreibende Kraft diese Reibungskraft überwindet. Je nach Bewegungszustand unterscheidet man verschiedene Reibungsarten.

10.1 Reibungs- und Normalkraft

Ein auf einer Unterlage liegender Körper übt auf die Unterlage eine sogenannte Normalkraft F_N aus. Dabei handelt es sich meistens um die Gewichtskraft F_G, es sind aber auch noch zusätzlich einwirkende Kräfte möglich. Die Normalkraft des Körpers drückt in der Regel senkrecht auf die Unterlage. Beim Verschieben des Klotzes muss die Reibungskraft überwunden werden. Diese wirkt immer tangential an der Berührungsfläche.

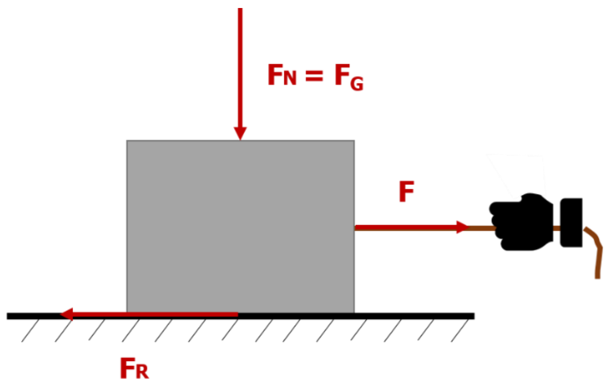


Abbildung 92: Reibungskraft

Das Coulombsche Reibungsgesetz

Der französische Physiker Charles Coulomb (1736-1806) stellte experimentell fest, dass die auf die Unterlage wirkende Normalkraft F_N eines Körpers direkt proportional zu der Reibungskraft F_R ist.

$F_R \sim F_N$

Blatt 10-1: Was bremst denn da?

10.2 Haftreibung

Die Haftreibung wird auch als Reibung im Ruhezustand bezeichnet, da sie die Reibung ist, die zur Bewegung eines Gegenstandes überwunden werden muss. Die Kraft, die vor dem Bewegungsbeginn benötigt wird, ist aufgrund des Aneinanderhaftens der Körper daher größer als die Kraft nach dem Beginn des Bewegungsvorgangs.

Die Größe der Reibungskraft hängt neben der Normalkraft von vielen weiteren Einflussfaktoren ab. Zur Vereinfachung wurden diese in einem Proportionalitätsfaktor, dem Reibungskoeffizient, zusammengefasst.

Die Haftkraft F_{RH} lässt sich mit folgender Formel bestimmen:

$$F_{RH} = \mu_H \cdot F_N$$

μ_H = Haftreibungskoeffizient []
F_N = Normalkraft [N]

10.3 Gleitreibung

Nach Beginn des Bewegungsvorgangs gleiten die Körper aneinander. Jetzt spricht man von der Gleitreibung, der Reibung eines Körpers im Bewegungszustand. Zur Berechnung der Gleitreibungskraft F_R wird ein anderer Reibungskoeffizient benötigt:

$$F_R = \mu_R \cdot F_N$$

μ_R = Gleitreibungskoeffizient []
F_N = Normalkraft [N]

Einige Haft- und Gleitreibungskoeffizienten können der nachfolgenden Tabelle entnommen werden.

Tabelle 20: Reibungskoeffizienten im trockenen Zustand

(angelehnt an H. Herr 1991, S. 98, A. Böge 1990, S. 81)

Werkstoff	Haftreibungskoeffizient μ_{H}	Gleitreibungskoeffizient μ_{R}
Holz auf Holz	0,5	0,3
Holz auf Metall	0,7	0,5
Stahl auf Stahl	0,15	0,15
Stahl auf Leder	0,6	0,3

Wie groß die Haft- und Gleitreibungskraft ist, hängt nur von der Größe der Normalkraft und dem Reibungskoeffizienten ab.

Blatt 10-2: Haft- und Gleitreibung I

Blatt 10-3: Haft- und Gleitreibung II

10.4 Rollwiderstand

Im Gegensatz zu den bisher genannten Reibungsarten, gleitet ein Rollkörper nicht auf seiner Unterlage, sondern er rollt. Das Rollen ist nur wegen der tangentialen Haftreibekraft möglich. Bei genauerer Betrachtung verformt sich entweder der Rollkörper oder seine Unterlage aufgrund der Gewichtskraft der Körper.

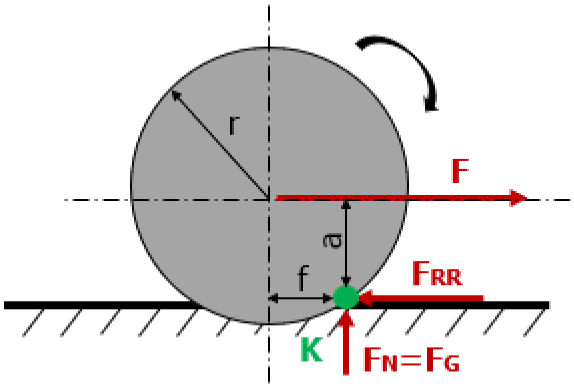


Abbildung 93: Rollwiderstand

Nimmt man an, dass wie in Abbildung 93939394 dargestellt, die Unterlage aus weicherem Material besteht, dann wird der Rollkörper darin hineingedrückt und es bildet sich ein Kipppunkt K. Rollt der Körper nun in Richtung der Rollkraft F, so handelt es sich dabei also um ein sich wiederholendes Kippen über diese Kante K.

Die Formel für die Rollwiderstandskraft F_{RR} erhält man durch das Momentengleichgewicht im Kipppunkt. Da die Einsenkung des Rollkörpers um den Betrag $r\text{-}a$ nur sehr gering ist, nimmt man an, dass $r \approx a$.

$$\sum M_{\mathrm{K}} = 0 \qquad F_{\mathrm{RR}} \cdot r - F_{\mathrm{N}} \cdot f = 0$$

$$F_{\mathrm{RR}} = F_{\mathrm{N}} \cdot \frac{f}{r}$$

$\mathrm{F_N} = \mathrm{Normalkraft[N]}$

$\mathrm{f} = \mathrm{Hebelarm\ des\ Rollwiderstands\ [m]}$

$\mathrm{r} = \mathrm{Radius\ [m]}$

Anstelle des Quotienten $\frac{f}{r}$ verwendet man häufig auch die Reibungszahl des Rollwiderstands μ_{RR}. Somit kann die Formel noch weiter vereinfacht werden:

$$F_{RR} = F_N \cdot \mu_{RR}$$

Die Rollreibekraft ist bei gleicher Normalkraft immer kleiner als die Gleitreibungskraft. Das ist auch der Grund dafür, warum in der Technik anstatt Gleitführungen heutzutage größtenteils Kugellager eingesetzt werden.

Blatt 10-4: Einfach mal rollen lassen …

Exkurs: Einen reibungslosen Ablauf durch Lager

Wie wir bereits gelernt haben, spielt die Reibung in jedem Kapitel des Heftes eine große Rolle, denn schließlich tritt sie überall da auf, wo zwei Körper sich berühren. Bei dem Bau der Leonardobrücke ist Reibung erwünscht, man spricht hier auch von positiver Reibung. Ein weiteres Beispiel dafür wären zum Beispiel die Bremsscheiben an einem Fahrrad. Unerwünschte Reibung, oder auch negative Reibung genannt, führt dagegen zu einem Verlust an Energie. An Fahrzeugen und Werkzeugmaschinen wird dadurch der Wirkungsgrad verringert. Um die Reibung hierbei trotzdem möglichst gering zu halten, werden sogenannte Lager eingesetzt.

Lager für tausendundeine Anwendung

Kein Fahrzeug würde ohne Lager fahren, kein Hubschrauber fliegen und noch nicht mal die Haustüre könnte ohne Lager geöffnet werden. Lager werden in mehr als 60 Industriebranchen eingesetzt. Diese werden in 4 Bereiche eingeteilt:

1. Produktionsmaschinen (z.B. Werkzeugmaschinen)
2. Antriebs- und Schienenverkehrstechnik (z.B. für Windräder oder Eisenbahnen)
3. Schwerindustrie (z.B. Bergbautechnik)
4. Consumer Products (z.B. Inline-Skates oder Motorräder)

Lagerarten

Eine Lagerung besteht in der Regel aus mindestens zwei Lagern und beschränkt die Freiheitsgrade zweier relativ zueinander bewegter Elemente.

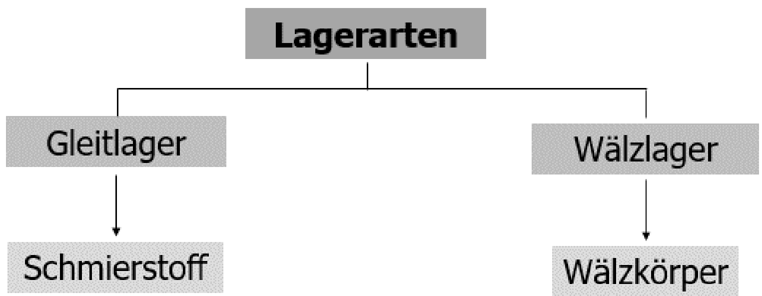


Abbildung 94: Lagereinteilung nach der Kinematik der Kontaktpartner
(angelehnt an Skript Maschinenkonstruktion)

Die Aufgabe von Lagern ist eine möglichst reibungsarme Übertragung von Kräften zwischen Lagerelementen. Sie dienen der Führung umlaufender Maschinenteile und übertragen Kräfte zwischen ruhenden und bewegten Bauteilen. Lager werden in der Regel nach der Kinematik der Kontaktpartner eingeteilt (s. Abbildung 94949495). Man unterscheidet hierbei Gleit- und Wälzlager.
Bei Wälzlagern sorgen Wälzkörper für eine Druckkraftübertragung, bei Gleitlagern gleiten feste Körper über eine Gleitschicht aneinander (s. Abbildung 95959596).

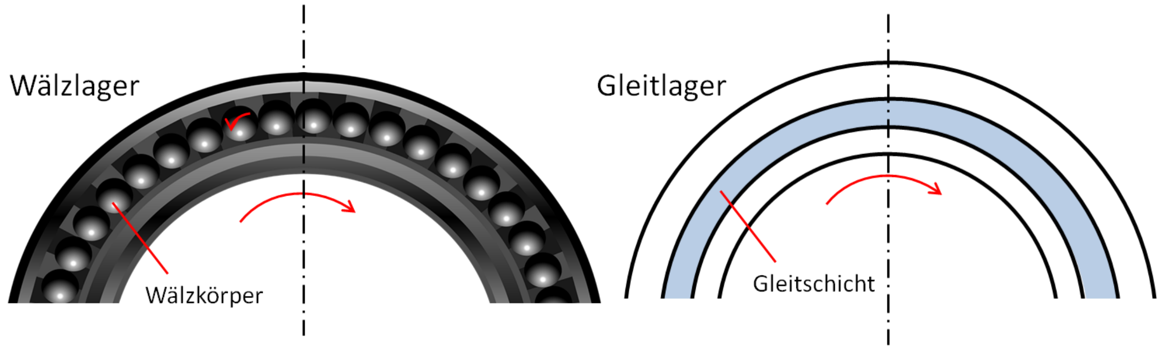


Abbildung 95: Vergleich Wälz- und Gleitlager

Wälzlager

Wälzlager bestehen aus einem Außen- und einem Innenring. Diese sind zueinander beweglich und werden durch sogenannte Wälzkörper, die durch einen Käfig in einem gleichen Abstand voneinander gehalten werden, voneinander getrennt. Während des Betriebs rollen die Wälzkörper zwischen den zwei Ringen ab. Im Vergleich zu den Gleitlagern ist die dabei auftretende Reibung geringer.

Abbildung 96: Aufbau eines Wälzlagers

Wälzlager können weiter nach der Wirkrichtung der Lagerkraft in Radial-, Radial-axial- und Axiallager differenziert werden. Außerdem dienen zur Kraftübertragung entweder Kugeln oder Rollen. Für jede Einsatzart gibt es somit die passende Lagerung.

Gleitlager

Gleitlager haben vielfältige Einsatzmöglichkeiten und werden für so gut wie alles, was sich beim Bau einer Maschine bewegt, eingesetzt. Um die Reibung und den Verschleiß zu verringern, werden hierbei Zwischenmedien, sogenannte Schmiermittel, eingesetzt. Auch hier unterscheidet man verschiedene Formen. Die zwei zu lagernden Elemente können so entweder durch eine Flüssigkeit oder durch einen gasförmigen Schmierstoff voneinander getrennt sein. Das Problem besteht darin, dass beim An- und Abbremsvorgang meistens zuerst eine Mischreibung auftritt, bis die führenden Teile durch das Schmiermittel getrennt werden. Man bezeichnet solche Lager daher auch als dynamische Lager. Sogenannte statische Lagerungen enthalten zur Lösung dieses Problems eine Pumpe. Diese drückt beispielsweise Öl in eine Welle, so dass die Lager ständig durch den Schmierfilm voneinander getrennt sind.

Einbau

Üblicherweise werden Lager auf Achsen oder Wellen befestigt. In einer technischen Zeichnung werden Kugellager als Kreis in einem Quadrat dargestellt. Die zwei Rechtecke darin symbolisieren den Außen- und Innenring. Wie auch in der Baukonstruktion verwendet man häufig ein Fest- und ein Loslager, um der Welle die Möglichkeit zu geben, sich bei einer Erwärmung axial auszudehnen. Beide Lager nehmen radiale Kräfte auf, wobei das Festlager durch die gesamte Axialkraft belastet wird. Die praktische Umsetzung zeigt Abbildung 97979799.

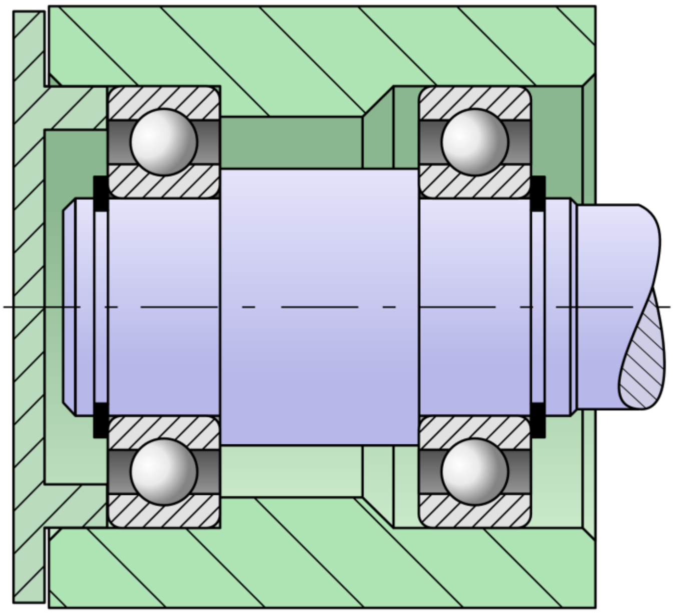


Abbildung 97: Lagereinbau in Form einer Fest-Los-Lagerung
(https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fest-Los-Lagerung.svg ;Jahobr / CC BY-SA)

Lagerberechnung

Mit einer Lagerberechnung kann man die Lebensdauer eines Lagers bestimmen und diese somit dimensionieren. Das ist für die Wartung und den Betrieb einer Maschine von großer Bedeutung.

$$L_h = \frac{10^6}{60 \cdot n} \cdot \left(\frac{C_r}{P}\right)^p$$

L_h = Lebensdauer [h]

C_r = dynamische Tragzahl [N] (aus Katalog)

n = Drehzahl [1/min]

P = dynamisch äquivalente Belastung [N]

p = Exponent der Lebensdauergleichung (= 3 bei einem Kugellager mit Punktberührung)

Unter der Tragzahl versteht man die Lagerbelastung, die eine Lebensdauer von einer Million Umdrehungen ermöglicht. Sie ist aus Lagerkatalogen entnehmbar (bspw. Schaeffler AG). Die dynamisch äquivalente Belastung entspricht bei einem Loslager (bzw. einem Festlager mit nur einer vertikalen Belastung) der vertikalen Belastung. Der Lebensdauerexponent stammt aus Versuchen zur Lebensdauerermittlung und beträgt bei einem Kugellager mit Punktberührung 3.

$$L_{h,gefordert} < L_{h,vorh}$$

Falls die Lebensdauer nicht ausreichend ist, muss das nächstgrößere Lager ausgewählt werden.

Für Bildungszwecke bietet die Schaeffler Technologies AG & Co. KG (www.schaeffler.de, http://pdf.directindustry.de/pdf/schaeffler-technologies-ag-co-kg-169.html) vielfältige Kataloge und Informationsmaterialien an.

Exkurs: Einen reibungslosen Ablauf durch Lager

11. Hilfreiche Buch- und Internet-Tipps

Für ein umfangreiches Verständnis, bei der Findung von Projektideen oder bei Problemen betreffend der Umsetzung, können einige Internetseiten und Bücher sehr hilfreich sein. Diese werden nachfolgend hier aufgelistet:

11.1 Bücherauswahl

1. K. Müller und H. Otto Alles: Statik
2. K. Müller: Festigkeitslehre
3. Gross, Hauger und Schnell: Technische Mechanik, 1 Statik
4. W. Mahringer: Baustatik, Band 1
5. A. Böge: Mechanik und Festigkeitslehre

(Eine ausführliche Auflistung der Bücher mit Jahr und Verlag ist im Literaturverzeichnis zu finden.)

11.2 Zur Übung

Für vertiefende Aufgaben zur *Technischen Mechanik* bietet sich das Übungsbuch von Gross, Schnell, Ehlers und Wriggers „Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik" sehr gut an. In dem Buch „Statik" von Müller und Otto werden nochmals zahlreiche Beispiele zu den grundlegenden Themen gegeben. Auch Tutorials im Internet (beispielsweise StudyHelpTV, verfügbar unter https://www.youtube.com/user/Studyhelpmedia) oder die Skripte zur Festigkeitslehre und Technischen Mechanik der Uni Stuttgart (verfügbar unter: http://www.mechbau.uni-stuttgart.de/ls2/Downloads/Formelsammlung_TM1.pdf) bieten sich an, um sein Wissen zu erweitern.

11.3 Weiterführende Anregungen

Anregungen für einen ingenieurwissenschaftlichen Bezug und aktuelle Forschungsthemen finden Sie unter den folgenden Links:

- https://www.mpg.de/11891860/milliroboter-antrieb-bewegung
- https://www.md-mag.com/interior-architecture/news/agile-architektur/
- https://www.bauing.uni-kl.de/sdt/forschung/erdbebeningenieurwesen/
- https://www.bauing.uni-kl.de/sdt/forschung/baudynamik-inkl-experimentelle-baudynamik/
- https://www.mpsd.mpg.de/forschung/cmdd

12. Arbeitsblätter

Blatt 5-1: Was ist eine Kraft?

Zeichnen und Berechnen von Kräften unter Einbezug der Newton´schen Axiome

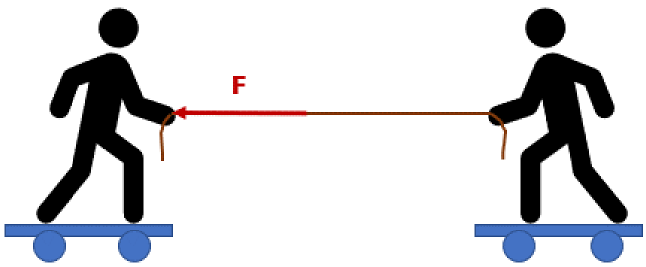


Abbildung 98: Anwendung der Newton´schen Axiome

Aufgabe 1:

a) Setze mit deinem Partner den oben abgebildeten Versuch um oder führe ein Gedankenexperiment durch: 2 Personen ähnlicher Masse stehen auf einem Skateboard und halten ein Seil in den Händen. Es zieht nur die linke Person an dem Seil, die Rechte hält es nur in der Hand fest. Was kannst Du beobachten und mit welchem Newton´schen Axiom lassen sich diese Beobachtungen begründen? Zeichne die Reaktionskräfte in die Abbildung ein.

b) Ein stehender Mensch mit der Masse m = 60 kg übt auf den Boden eine Gewichtskraft F_G aus, die durch die Erdanziehung zustande kommt. Berechne diese.

c) Wie kann die Einheit N durch die Einheiten kg, m und s dargestellt werden? Beschreibe die Einheit in eigenen Worten.

d) Zeichne eine Kraft mit den folgenden Eigenschaften:

- Die Wirkungslinie (gestrichelt zeichnen) der Kraft ist 20° zur Horizontalen geneigt
- Der Betrag ist 50 kN (Maßstab: 1 cm = 10 kN)
- Die Kraftrichtung wird durch einen Pfeil gekennzeichnet.

Kopfnussaufgabe 1:

Buffalo Bill schoss der Legende nach, während er ritt, mit seinem Gewehr senkrecht nach oben in die Luft und fing die Kugel dann in seinem Gewehrlauf wieder auf. Begründe unter Einbezug der Newtonschen Axiome, ob das wirklich möglich ist.

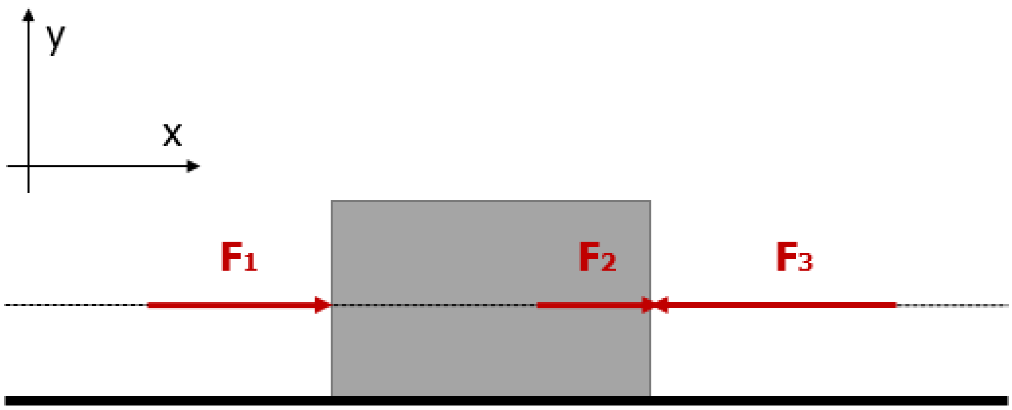
TIPP

Für die Darstellung der Einheit N kann das Grundgesetz der Dynamik hilfreich sein.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 5-2: Kräfteaddition

Die grafische und analytische Zusammensetzung von Kräften zu einer Resultierenden.



1 cm ≙ 10 N

Abbildung 99: Kräfte auf einer Wirkungslinie

?

Aufgabe 2:

a) Die drei Kräfte F_1, F_2 und F_3 greifen an dem oben abgebildeten starren Körper an. Fasse die Kräfte einmal analytisch (rechnerisch) und einmal grafisch zu einer einzelnen resultierenden Kraft zusammen. Ermittle, in welche Richtung der Klotz verschoben wird.

b) Die angreifenden Kräfte liegen nun nicht mehr auf einer Wirkungslinie. Bestimme mit Hilfe eines Kräfteplans erneut grafisch die resultierende Kraft F_{res}. Ermittle in welche Richtung der Klotz jetzt geschoben wird.

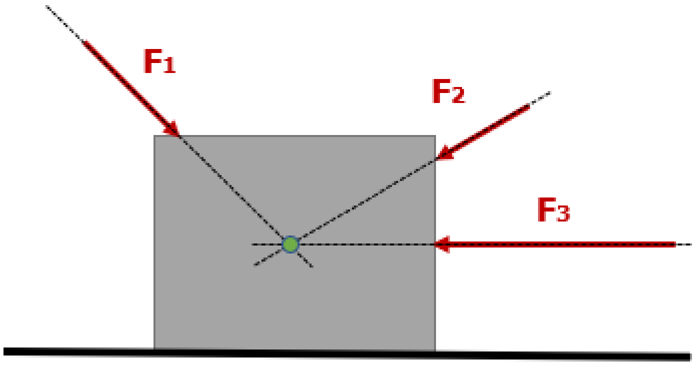


Abbildung 100: Übung zur Bestimmung der Resultierenden

Kopfnussaufgabe 2:

Begründe, ob es eine Rolle für die Richtung und den Betrag der Resultierenden spielt, in welcher Reihenfolge Du die Einzelkräfte im Kräfteplan aneinanderreihst.

TIPP

Tipp: Beachte in welche Richtungen die Kräfte zeigen. Orientiere Dich beim Rechnen an den Vorzeichen des Koordinatensystems!

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 5-3: Wie zerlegt man eine Kraft?

Die grafische und analytische Zerlegung von Kräften.

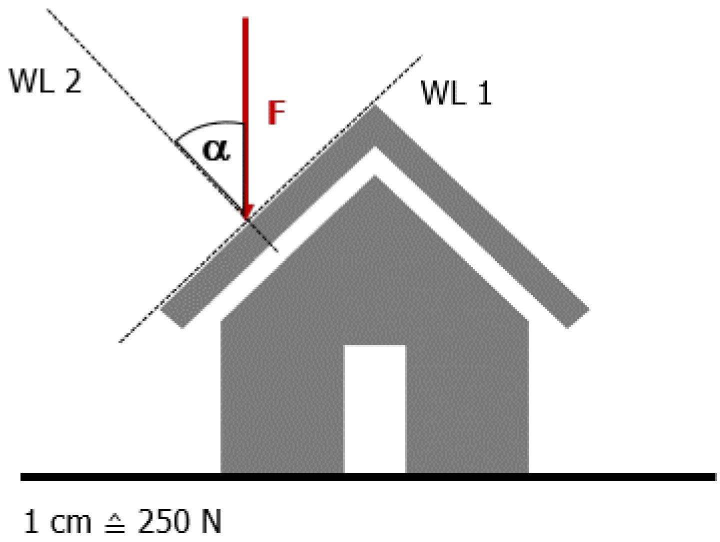


Abbildung 101: Haus mit Last

(angelehnt an Mahringer, W. 2013, S. 25 f.)

Aufgabe 3:

a) Durch eine Schneelast wirkt auf das Dach eines Hauses die Kraft F mit F =625 N. Der Winkel α entspricht der Dachneigung und beträgt 45°. Zerlege die Kraft F grafisch in ihre Einzellasten entsprechend den vorgegebenen Wirkungslinien (WL). Bestimme den Betrag der Kraftkomponenten.

b) Überprüfe das Ergebnis nun rechnerisch mit Hilfe der Winkelsätze.

Kopfnussaufgabe 3:

Zwei Personen tragen gemeinsam einen Koffer. Zerlege die Kraft *F* entsprechend den vorgegebenen Wirkungslinien. Begründe, welche Person mehr Gewicht trägt.

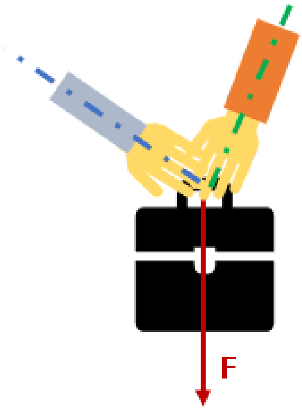
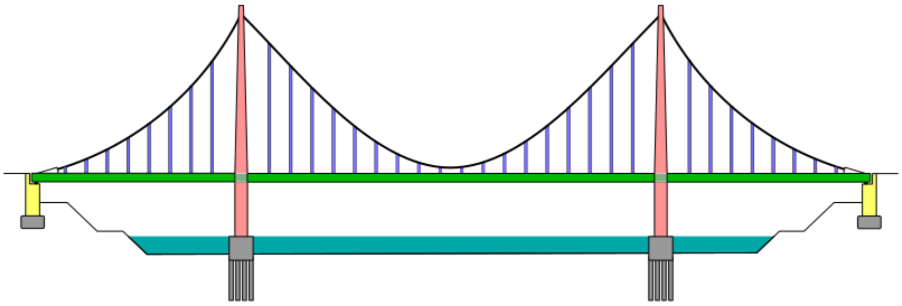


Abbildung 102: Kräftezerlegung Koffer

Tipp: Bei der Zerlegung der Kraft entsteht jetzt kein Rechteck mehr, sondern ein Parallelogramm.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Exkurs: Brücken verbinden I

	Eine Brücke beschriften, die Aufgaben der einzelnen Komponenten benennen sowie die Belastungsarten vergleichen.
	 Abbildung 103: Brückenaufbau (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:H%C3%A4ngebr%C3%BCcke_Schema.svg)
?	**Aufgabe 1:** a) Beschrifte die Teile der oben abgebildeten Brücke. Nenne die Aufgaben der einzelnen Komponenten.

b) Begründe, um was für eine Brückenart es sich dabei handelt.

c) Erläutere welchen Kräftearten die Brücke ausgesetzt wird. Nenne Unterschiede zwischen den Kräftearten und fertige jeweils eine Skizze an.

Kopfnussaufgabe 1:

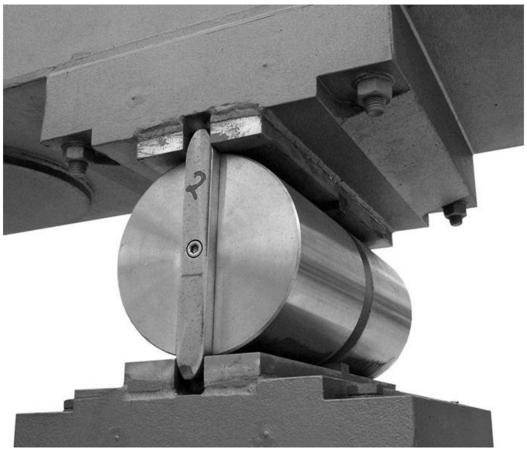


Abbildung 104: Brückenkomponente

(https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lager_01_KMJ.jpg; KMJ / CC BY-SA)

Begründe, um was für ein Brückenbestandteil es sich hierbei handeln könnte. Stelle Vermutungen auf, warum die zwei Brückenteile hier nicht einfach fest miteinander verbunden sind.

TIPP

Tipp: Welche Gefahren könnten auftreten, wenn die Brückenkomponenten starr miteinander verbunden wären?

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Exkurs: Brücken verbinden II

Den statischen Aufbau von Brückenarten analysieren sowie deren Einsatz kennen.

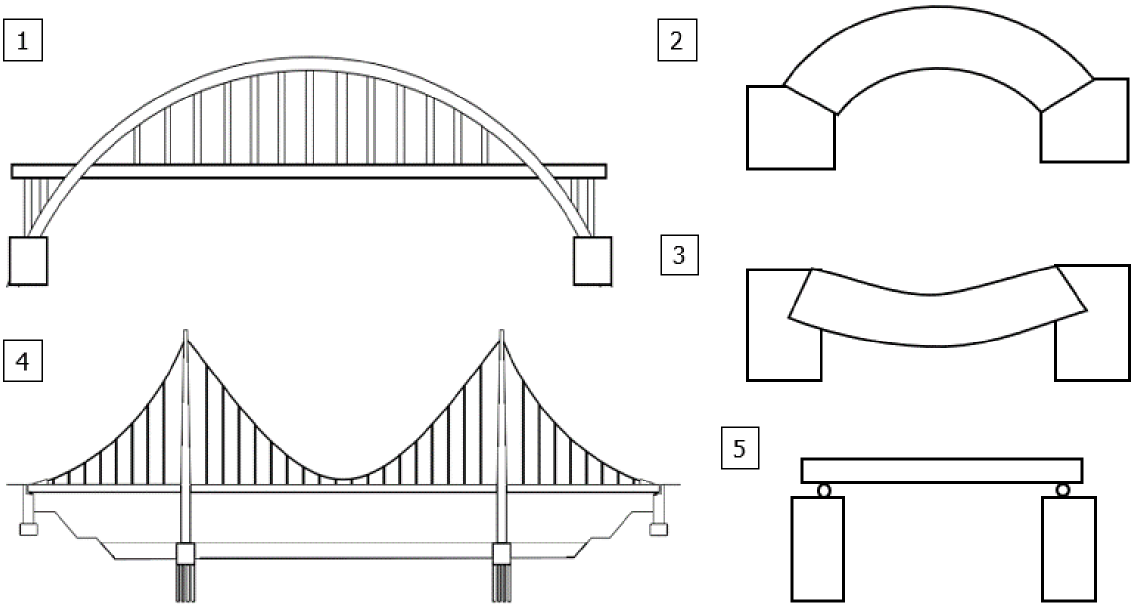


Abbildung 105: Brückenarten

(Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/H%C3%A4ngebr%C3%BCcke#/media/File:H%C3%A4ngebr%C3%BCcke_Schema.svg, angelehnt an https://www.leifiphysik.de/mechanik/kraefteaddition-und-zerlegung/ausblick/bruecken)

Aufgabe 2:

a) Benenne die oben abgebildeten Brückenarten. Lese Dir den Informationstext genau durch und mache Dir Notizen, wie die einzelnen Brücken statisch aufgebaut sind und wo sie hauptsächlich eingesetzt werden.

b) Analysiere die Brücke unter statischen Gesichtspunkten. Zeichne in die Skizze mit Pfeilen ein, wo Zugkräfte (grün) und Druckkräfte (blau) auftreten. Berücksichtige dabei, dass bei einer statisch stabilen Brücke alle Kräfte über die Auflager und Widerlager in den Untergrund abgeleitet werden müssen.

Kopfnussaufgabe 2:
Erläutere, warum Dreieckskonstruktionen in der Baustatik so häufig eingesetzt werden.

TIPP

Tipp: Forme einen Meterstab zuerst zu einem Viereck und dann zu einem Dreieck und vergleiche Deine Beobachtungen.

	Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Exkurs: Brücken verbinden III

Fachwerkkonstruktionen benennen, die Kräfteableitung darin analysieren und einfache Kräfteberechnungen dazu durchführen.

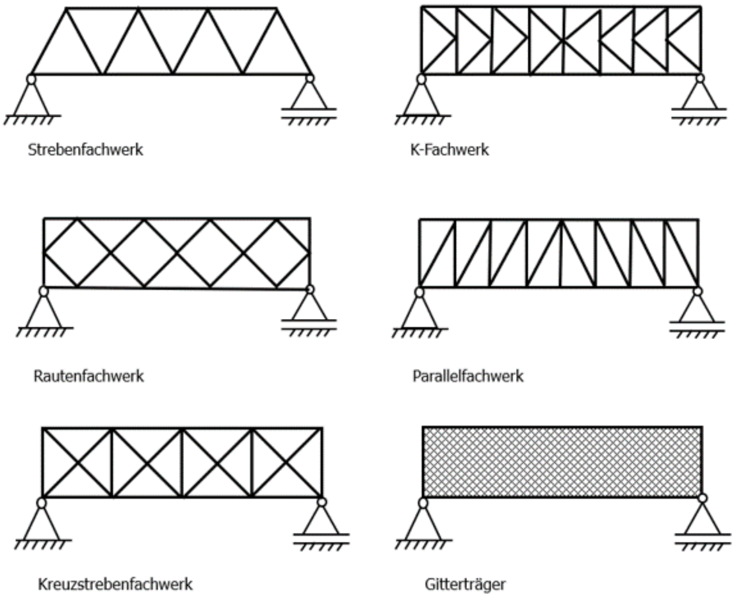


Abbildung 106: Fachwerkstypologien
(angelehnt an Vorlesung Baukonstruktion)

Aufgabe 3:

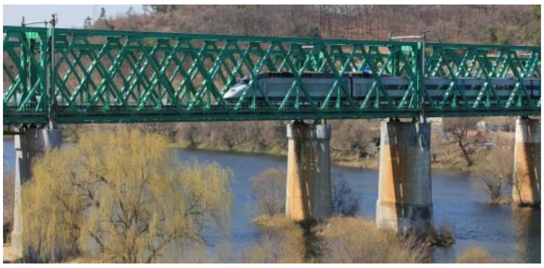
a) Nenne die Vorteile einer Fachwerkkonstruktion.

b) Ordne die Fachwerkstypologien den unten abgebildeten Brücken zu.

https://www.flickr.com/photos/brickpit/30478678820/

Lutz Marl / CC BY-NC-SA 2.0

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ski-bbereen-trussbridge.jpg
Störfix / CC BY-SA



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hochbr%C3%BCcke_Brunsb%C3%BCttel-01.JPG#/media/Datei:Hochbrücke_Brunsbüttel-01.JPG_ von Mehlauge / CC BY-SA 3.0

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/9e/
Viaduc_ferroviaire_-_Busseau-sur-Creuse%2C_Ahun%2C_Creuse%2C_France.JPG
Sebleouf / CC BY-SA

c) Nenne Beispiele, wo Fachwerkkonstruktionen außerhalb des Brückenbaus eingesetzt werden.

d) Schaue Dir die Animation zur Kräfteübertragung in einer Fachwerkkonstruktion an und beschreibe wie die Kräfte, die der LKW auf die Brücke ausübt, in den Untergrund abgeleitet werden. Analysiere, um welche Kräfte es sich jeweils bei den verwendeten Farben handelt und zeichne in die Abbildung 107107107109 ein, welche Stäbe auf Zug und welche auf Druck belastet werden.

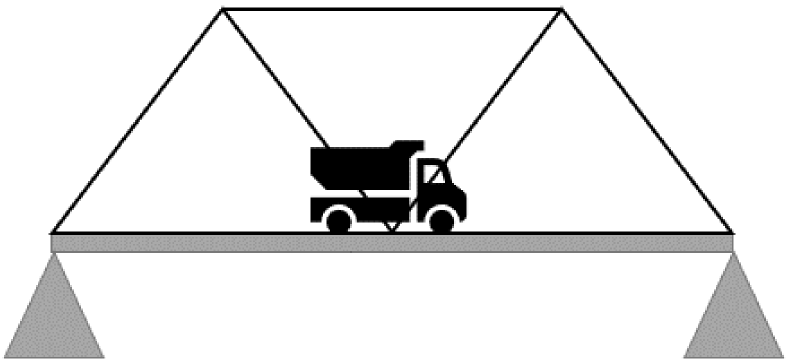


Abbildung 107: Kraftableitung Fachwerkkonstruktion

(angelehnt an: https://www.leifiphysik.de/mechanik/kraefteaddition-und-zerlegung/ausblick/bruecken)

Kopfnussaufgabe 3:

Ermittle, welche Kraft das rechte und linke Lager aufnehmen muss, wenn ein LKW mit einer Masse von 12 t ein Viertel der Brückenlänge zurückgelegt hat.

Tipp: Überlege Dir, welches der Lager um wie viel stärker belastet wird.

	Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Exkurs: Brücken verbinden IV

Eine Brücke ohne Verbindungsmittel konstruieren und den Aufbau einer Leonardobrücke analysieren.

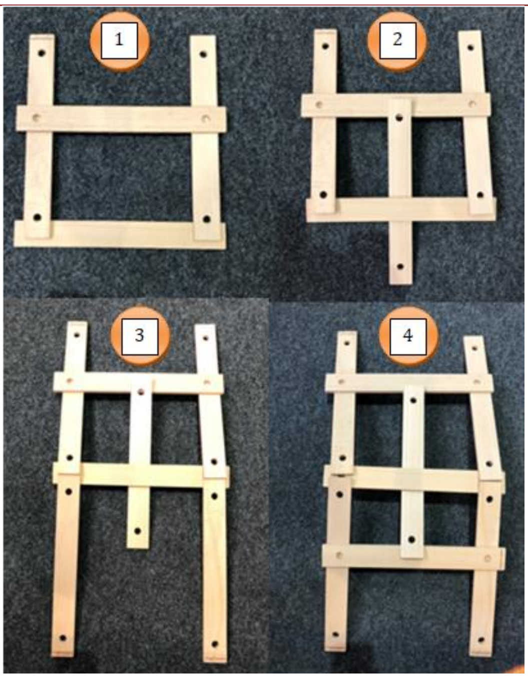


Abbildung 108: Bauanleitung Leonardobrücke (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonardo-Br%C3%BCcke_Strategie.png; GoeAl95 / CC BY-SA)

Aufgabe 4:

Die Leonardobrücke ist eine bogenförmige Brücke, die auf Leonardo da Vinci zurückgeht. Um sie zu bauen, benötigt man keinerlei Verbindungsmittel wie Leim oder Nägel.

a) Konstruiere ohne Verbindungsmittel nur aus den Dir zur Verfügung stehenden Stäben eine Brücke, mit der Du ein Hindernis von 20 cm überbrücken kannst. Fertige eine Skizze Deiner Konstruktion an.

b) Nehme nun die Bauanleitung (s. Abbildung 118118118121) zur Hand und baue die Brücke gemäß Leonardo da Vincis Prinzip nach.

c) Analysiere und beschreibe das Funktionsprinzip dieser Konstruktion. Ziehe in Deine Überlegungen mit ein, warum hier keine Verbindungsmittel benötigt werden.

d) Kann man mit dieser Form der Brücke auch sehr breite Flüsse überbrücken? Begründe und versuche selbst mit den Stäben solch eine Miniaturbrücke zu bauen.

e) Die Leonardobrücke wurde ursprünglich für das Militär, das weite Strecken zurücklegt, eingesetzt. Nenne diesbezüglich Vorteile dieser Brückenbauart.

Kopfnussaufgabe 4:

Konstruiere eine Brücke aus nur vier gleich langen Brettern, mit der Du eine Schlucht überwinden kannst, die ein bisschen breiter ist als die Länge der Bretter. Fertige eine Skizze Deiner Konstruktion an.

Tipp: Reibung spielt hier eine große Rolle.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Exkurs: Brücken verbinden V

Brückenkonstruktion durch Simulation.

Aufgabe 5:

Mit der App „Bridge Constructor FREE" kannst Du deine statischen Fähigkeiten für den Bau von Brücken unter Beweis stellen. Deine Aufgabe ist es, Hindernisse geschickt mit Hilfe von verschiedenen Materialien zu überbrücken. Da Dir nur ein begrenztes Budget zur Verfügung steht, sollte Deine Konstruktion auch die wirtschaftlichen Gesichtspunkte mit einbeziehen. Nach jeder Konstruktion wird Deine Brücke einem Belastungstest mittels darüberfahrenden Fahrzeugen ausgesetzt. Lasse also Deiner Kreativität freien Lauf und wende Dein gelerntes Wissen geschickt an.

a) Lade Dir die App „Bridge Constructor FREE" auf Dein Handy und öffne diese. Die App gibt Dir automatisch wichtige Hinweise zur Bedienung.

b) Konstruiere die ersten vier Brücken und fertige von jeder Brücke eine Skizze an, in der Du einzeichnest wie die Kräfte in die Auflager abgeleitet werden.

c) Baue noch weitere Brücken. Vergleicht am Ende der Unterrichtsstunde wer die meisten Brücken mit dem geringsten Budget gebaut hat und damit den Architekturpreis gewinnt.

TIPP	**Tipp: Dreieckstrukturen sind besonders stabil. Wenn Du während der Arbeit mit der App dein Internet ausschaltest, kannst Du unnötige Werbung verhindern.**

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 6-1: Wie wirkt ein Hebel?

Herleitung des Hebelgesetzes.

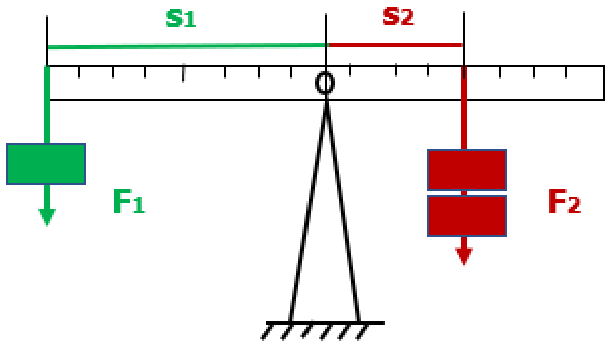


Abbildung 109: Aufbau Balkenwaage

Aufgabe 1:

a) Stelle den Gleichgewichtszustand durch eine verschiedene Anzahl an Gewichten und durch Änderung der Hebelarme an den beiden Hebeln dar. Wiederhole den Versuch vier Mal mit unterschiedlichen Massen und Abständen. Trage Deine Ergebnisse in die Tabelle ein.

Linkes Drehmoment		Rechtes Drehmoment	
Masse m_1 [g]	Abstand s_1 [cm]	Masse m_2 [g]	Abstand s_2 [cm]

b) Schaue Dir deine ermittelten Werte genau an und versuche einen Zusammenhang zwischen der rechten und linken Seite zu finden. Vervollständige die Regel: „Der Hebel befindet sich im Gleichgewicht, wenn …"

c) Bestimme mit Hilfe deiner formulierten Regel nun die fehlenden Angaben der unten abgebildeten zweiseitigen Hebel, ohne es an der Versuchsapparatur zu testen. Stelle eine Formel zur Berechnung der fehlenden Größen auf.

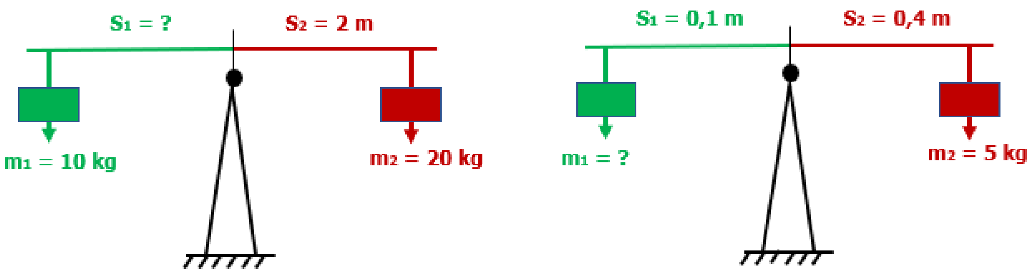
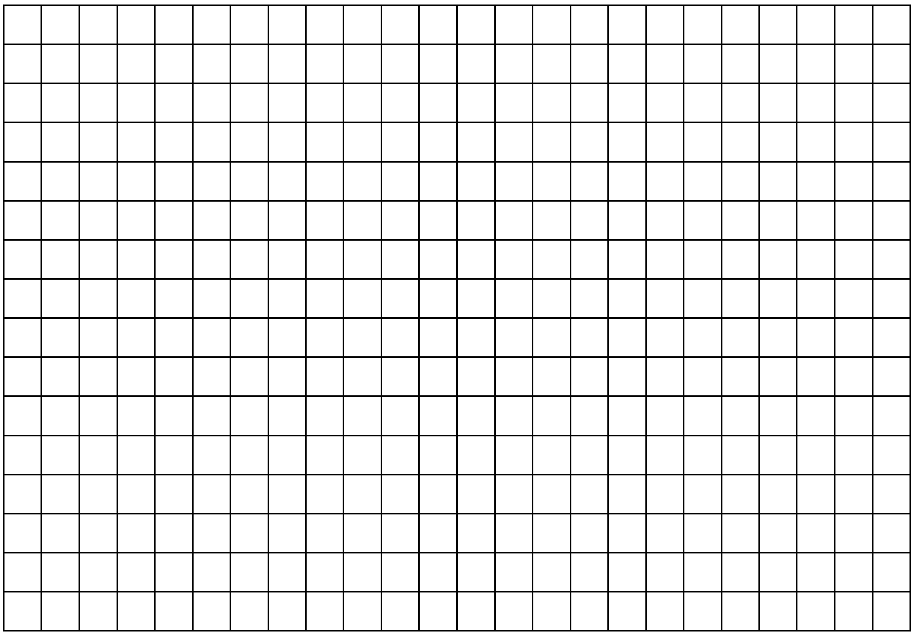


Abbildung 110: Übung zur Balkenwaage



Kopfnussaufgabe 1:

Ein Partner hängt in einem von ihm gewählten Abstand s_1 eine beliebige Masse m_1 an die oben abgebildete Versuchsapparatur. Der zweite Partner soll nur durch überlegen die entsprechende Masse m_2 und den Abstand s_2 ermitteln, um die Hebelwaage im Gleichgewicht zu halten. Das Ergebnis kann anschließend durch das Anbringen der Gewichte überprüft werden.

TIPP

Um den Gleichgewichtszustand zu erlangen, muss das linke Drehmoment gleich dem rechten Drehmoment sein.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 6-2: Mit einem Hebel die Welt anheben

Anwenden und Rechnen mit dem Hebelgesetz.

Abbildung 111: Wippe als realer Anwendungsfall des Hebelgesetzes

Aufgabe 2:

Asterix wettet mit dem dicken Obelix, dass er ihn mit Hilfe einer Wippe anheben kann. Da Obelix 200 kg und Asterix nur 60 kg wiegt, kann Obelix das nicht glauben und setzt sich entspannt auf die Wippe.

a) Erkläre wie Asterix es schaffen kann, Obelix tatsächlich nur mit Hilfe der Wippe und seinem Eigengewicht anzuheben.

b) Obelix sitzt 20 cm vom Drehpunkt entfernt auf der Wippe. Berechne wie weit Asterix vom Drehpunkt entfernt sitzen muss, damit die Wippe ins Gleichgewicht kommt.

c) Begründe was passiert, wenn Asterix näher an den Drehpunkt heranrückt.

Kopfnussaufgabe 2:

Bereits vor über 4500 Jahren bauten die Ägypter riesige Pyramiden mit einer Genauigkeit, die heutige Ingenieure stutzen lässt. Ein Steinblock wog dabei mehrere Tonnen und musste vom Boden bis auf 100 Meter Höhe transportiert werden und das alles ohne Maschinen! Hast Du eine Idee wie das möglich war?

Am zweiseitigen Hebel herrscht Gleichgewicht, wenn an beiden Seiten das Produkt aus Kraft und dem zugehörigen Hebelarm gleich ist.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 6-3: Hebel im menschlichen Körper

Rechnen mit ein- und zweiseitigen Hebeln.

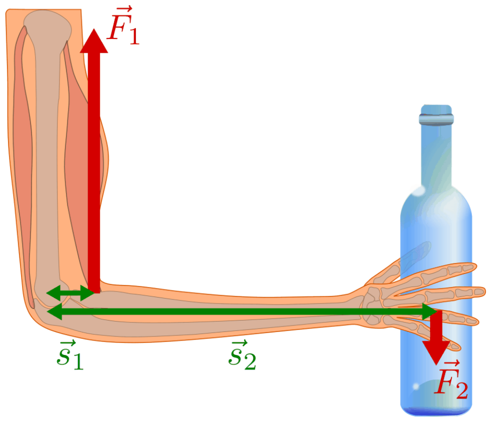


Abbildung 112: Der Arm als Hebel

(https://www.grund-wissen.de/physik/mechanik/kraftwandler-und-getriebe/hebel.html;

Aufgabe 3:

a) Der Mensch in Abbildung 112112112115 hält eine Flasche mit einem Gewicht von 1 kg in seiner Hand. Berechne, welche Kraft dabei auf den Muskel wirkt
(mit: s_1 = 80 cm, s_2 = 7 cm).

b) Begründe, ob es sich um einen ein- oder zweiseitigen Hebel handelt?

Auch der Unterkieferknochen stellt einen einseitigen Hebel dar. Der Drehpunkt befindet sich am Kieferngelenk (1). Wenn sich der Mund schließt, zieht sich der Muskel in der Abbildung zusammen.

a) Zeichne die Kraft des Muskels und den entsprechenden Hebelarm in die Abbildung ein.

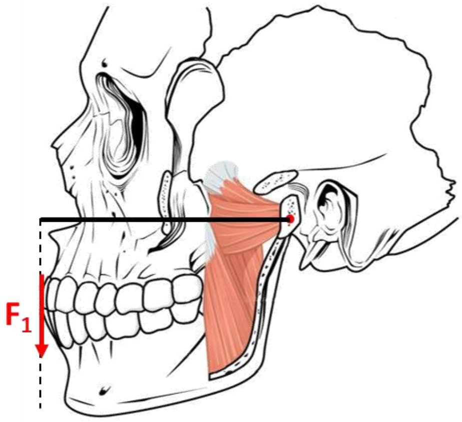


Abbildung 113: Kiefergelenk

(https://www.leifiphysik.de/mecha-

b) Um welchen Betrag wird die Kraft des Muskels durch die Hebelwirkung verstärkt?

c) Nenne Unterschiede zwischen einem ein- und einem zweiseitigen Hebel.

Kopfnussaufgabe 3:
Auch im Alltag benutzen wir häufig die Hebelwirkung. Überlege Dir vier Hebel, die Du zu Hause finden kannst und begründe jeweils, ob es sich dabei um einen einarmigen oder zweiarmigen Hebel handelt.

TIPP

Der Verstärkungsfaktor ergibt sich aus der Länge des Kraftarms geteilt durch die Länge des Lastarms.

	Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 6-4: Hebel in der Technischen Mechanik

Berechnung des Drehmoments.

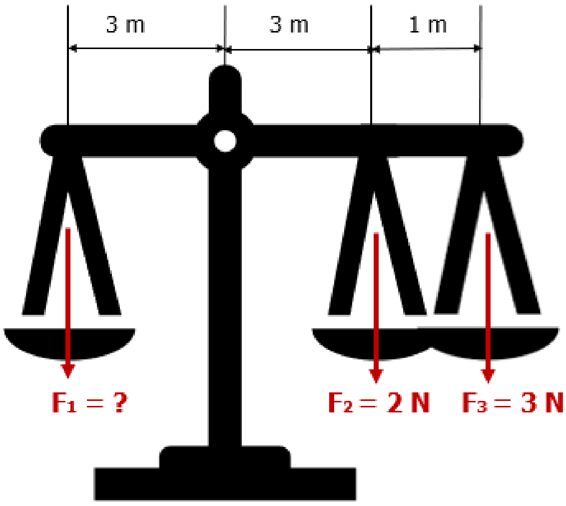


Abbildung 114: Anwendung Hebelgesetz

Aufgabe 4:

a) Berechne die Kraft F_1, so dass die Waage im Gleichgewicht steht.

b) An den Balken in Abbildung 115115115118 greifen zwei Kräfte und eine Linienlast an. Berechne den Abstand x, so dass der Balken gerade nicht kippt
(gegeben: a = 1 m, F = $\frac{4}{\sqrt{2}}$ N, F_G = 9 N).

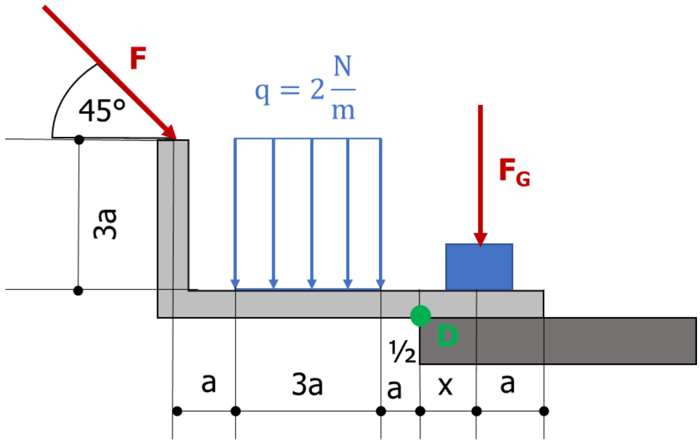


Abbildung 115: Momentengleichgewicht

Kopfnussaufgabe 4:

Erläutere, wie man die Aufgabe auch ohne die Zerlegung der Kraft F hätte lösen können.

Der Hebelarm ist immer der senkrechte Abstand der Wirkungslinie der Kraft zum Drehpunkt.

	Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 6-5: Eine rätselhafte Geschichte

Anwenden des Hebelgesetzes

Abbildung 116: Eine rätselhafte Geschichte

Aufgabe 1:

Ein junges, hübsches Mädchen kam in die Hölle. Der Teufel wollte die Schöne für immer bei sich behalten. Eines Tages aber bat und flehte das Mädchen, „lasse mich gehen, ich kann nicht bei dir bleiben, hier bin ich unglücklich und meine Schönheit wird bald vergehen." Aber der Teufel wollte das Mädchen nicht einfach so gehen lassen. „Wenn du folgende Aufgabe löst, dann öffne ich dir die Tür, die dich zurück in deine Welt führt", sagte der launige Höllenchef. Da er selbst schon Jahre über der Aufgabe brütete und keine Lösung fand, war er guter Hoffnung, dass auch das Mädchen daran verzweifelte. Der Teufel kramte aus einer Truhe neun äußerlich völlig gleich aussehende Kugeln hervor. Daneben stellte er eine einfache Balkenwaage mit zwei glänzenden Schalen. Beide beobachteten die Waage so lange, bis sich die Schalen nicht mehr bewegten und ihre Oberkanten eine gerade Linie bildeten. „Sie funktioniert perfekt" murmelte der Teufel. „Unter diesen neun Kugeln ist **EINE**, die schwerer ist als die acht anderen. Du hast **zwei** Versuche mit der Hebelwaage herauszufinden, welche Kugel es ist." Das verbitterte Mädchen weinte und war voller Entsetzen über das Wissen, dass sie die Aufgabe nicht lösen könnte. Ihr Peiniger zog sich freudig erregt zurück. Wie in Trance erhob sich das Mädchen aus ihrer Lethargie, leerte die gefüllten Schalen, legte eine neu definierte Anzahl Kugeln wieder hinein und verfolgte mit ihren Augen die Reaktion der Waage. Nach der zweiten Wägung standen dem Teufel die Haare zu Berge und als ihm seine Angebetete die Kugel, die ein anderes Gewicht als die acht anderen hatte, überreichte, war er verblüfft, aber hielt sein Versprechen und entließ die Schöne aus der Hölle.

(Quelle: http://www.oldiemusik-weimar.de/fun/spiele/index.html#)

	Erkläre, wie das Mädchen die Aufgabe gelöst hat.	
	**Der Teufel gab der Schönen auch keinen Tipp 😝**	
	Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-1: Immer mit der Ruhe…

Die Grundlagen der Statik (wie das Zerlegen einer Kraft) und die drei Gleichgewichtsbedingungen der Statik anwenden.

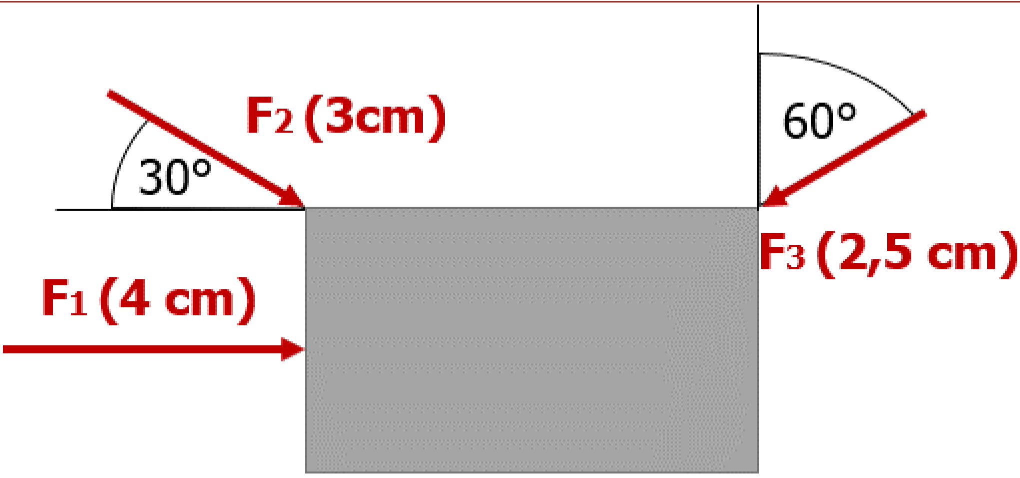


Abbildung 117: Übung Gleichgewichtskraft

Aufgabe 1:

a) Der obige Klotz wird mit einer Masse *m* von 3 kg durch die Kräfte F_1 bis F_3 belastet. Zeichne die nötige Gleichgewichtskraft ein, um den Klotz im Gleichgewicht zu halten. Berücksichtige dabei auch die Gewichtskraft F_G des Klotzes (1 cm ≙ 20 N). Berechne anschließend die nötige Gleichgewichtskraft.

b) Zerlege die Gleichgewichtskraft rechnerisch in ihre horizontalen und vertikalen Komponenten.

c) Beweise mit der ersten und der zweiten Gleichgewichtsbedingung der Statik, dass der Klotz in Ruhe bleibt (F_{2H} = 50 N, F_{3H} = 45 N). Berechne hierzu die fehlenden vertikalen Komponenten der Kräfte F_2 und F_3.

Kopfnussaufgabe 1:

Begründe, warum für den Ruhezustand des Klotzes nicht noch die 3. Gleichgewichtsbedingung der Statik überprüft werden muss.

Als Hilfestellung kannst Du zunächst die Wirkungslinien der Kräfte einzeichnen.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-2: Grundlagen der Statik

Einzeichnen der Auflagerreaktionen und Überprüfung der statischen Bestimmtheit.

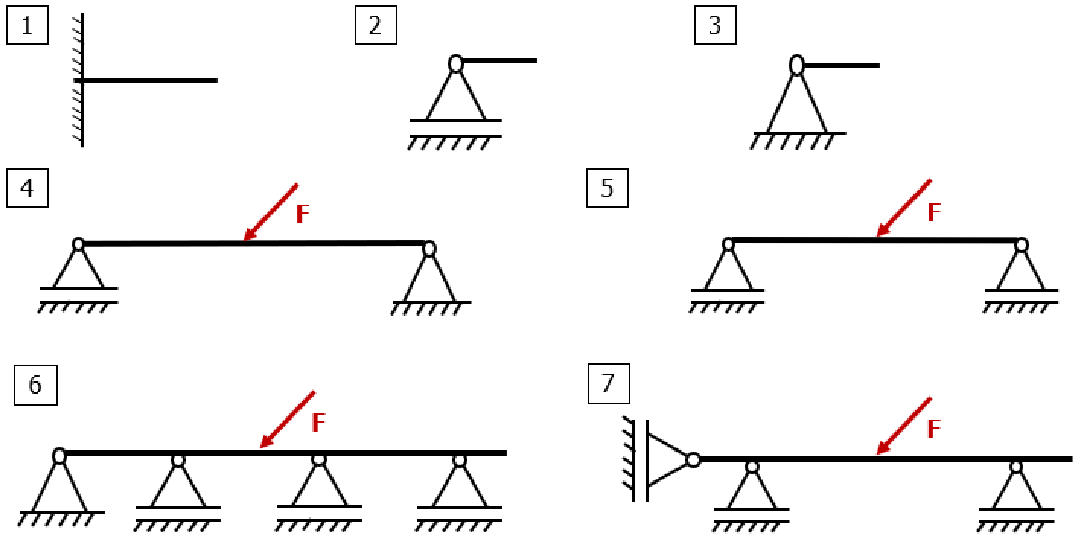


Abbildung 118: Auflagerkräfte

Aufgabe 2:

a) Zeichne in die Lager 1-3 die Reaktionskräfte ein. Analysiere welche Kräfte das Lager 2 dann noch aufnehmen kann und welche Bewegungsmöglichkeiten der damit gelagerte Körper noch hat. Zeichne zusätzlich die Freiheitsgrade mit einem grünen Stift ein.

b) Zeichne nun in die Träger 4-7 alle Auflagerkräfte ein. Benenne sie mit der korrekten Bezeichnung. Prüfe die Systeme anschließend auf ihre statische Bestimmtheit.

c) Erläutere, welche Folgen es hat, wenn ein System nicht statisch bestimmt ist.

Kopfnussaufgabe 2:

Begründe, weshalb man bei hitzebeanspruchten Bauteilen im Brückenbau meist ein Fest- und ein Loslager verwendet.

Tipp: Wodurch können Spannungen im Bauteil auftreten?

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-3: Einfach kann ja jeder …

Freischneiden von Bauteilen.

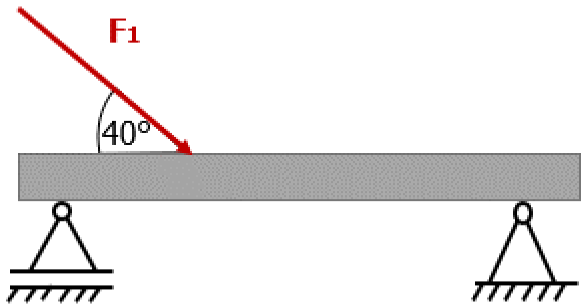


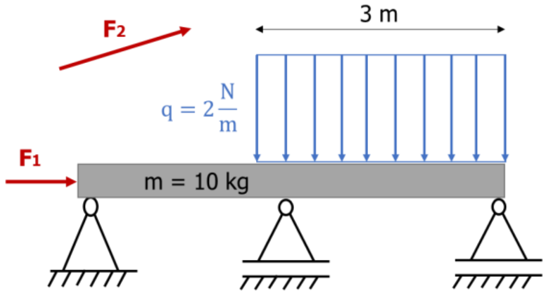
Abbildung 119: Belasteter Balken

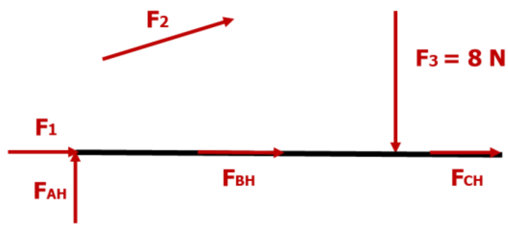
Aufgabe 3:

a) Der Balken mit einer Masse *m* liegt auf zwei Auflagern auf. Zeichne die eingeprägten Kräfte rot und die Reaktionskräfte blau in die Abbildung ein.

b) Fertige einen Freischnitt von dem Balken an.

c) Sind die Freischnitte der nachfolgend abgebildeten Systeme korrekt? Finde die insgesamt acht Fehler und verbessere sie.





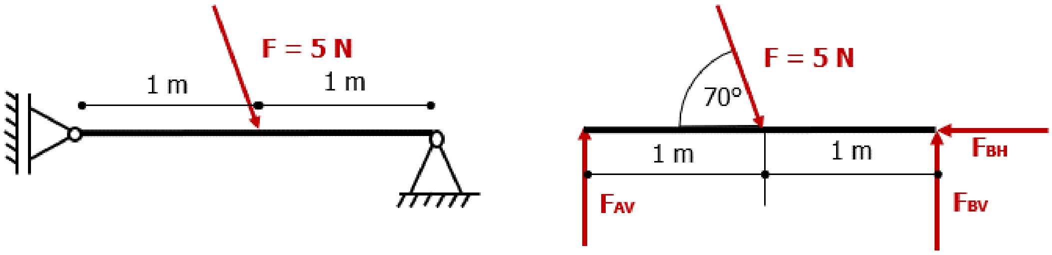


Abbildung 120: Fehlersuche Freischnitte

d) Schneide den Stuttgarter Fernsehturm frei.

Abbildung 121: Fernsehturm Stuttgart

Kopfnussaufgabe 3:

Schneide den abgestützten Stab mit der Masse *m* frei.

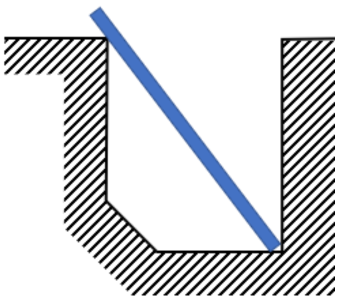


Abbildung 122: Übung Freischnitt Stab

Tipp: Überlege Dir zunächst, wie die freizuschneidenden Körper gelagert sind - also in welche Richtungen sie frei beweglich sind und in welche nicht.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-4: Alles im Gleichgewicht?

Einfache Berechnung von Auflagerkräften.

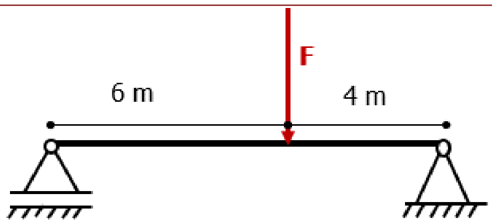


Abbildung 123: Berechnung Auflagerkräfte I

Aufgabe 4:

a) Schneide die oben skizzierte Balkenbrücke zunächst frei.

b) Berechne nun die Auflagerreaktionen der beiden Lager. Die Kraft *F* beträgt 1 kN.

Kopfnussaufgabe 4:

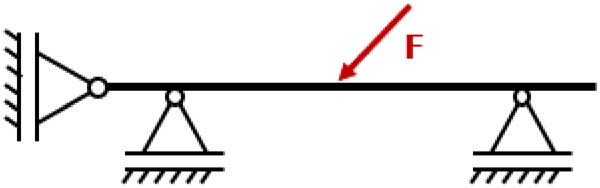


Abbildung 124: Lagerung Stab

Erkläre, wie man den oben abgebildeten Träger lagern könnte, um statisch die gleiche Wirkung zu erzielen.

Tipp: Überlege Dir, welche anderen Lagerungen die gleichen Bewegungen verhindern können.

Alles bearbeitet? ☐

Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-5: Auflagerkräfte I

Berechnung von Auflagerkräften.

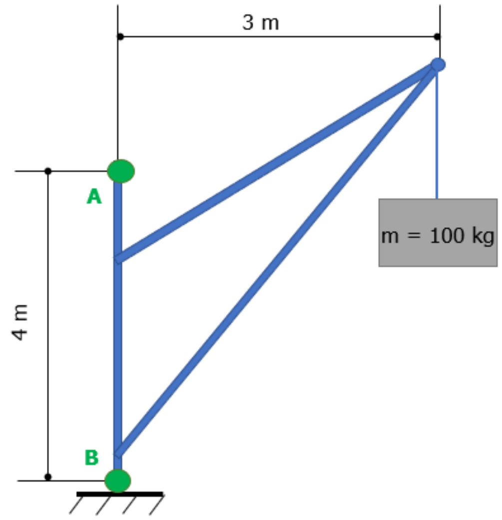


Abbildung 125: Skizze Wanddrehkran

(angelehnt an Böge, A. 1990, S. 52)

Aufgabe 5:

An einem Wanddrehkran hängt eine Last. Der Kran ist an der Wand mit zwei Lagern befestigt.

a) Schneide den Wanddrehkran zunächst frei. Analysiere anschließend, wo sich hier jeweils das Fest- und das Loslager befindet.

b) Berechne nun die Auflagerreaktionen der beiden Lager.

Kopfnussaufgabe 5:

Begründe, inwieweit man sich das Rechnen durch logisches Betrachten der Kranskizze hätte ersparen können.

Tipp: Auch wenn es sich dieses Mal um keinen Einfeldträger handelt, ist die Vorgehensweise in der Technischen Mechanik immer gleich.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-6: Auflagerkräfte II

Berechnung von Auflagerkräften.

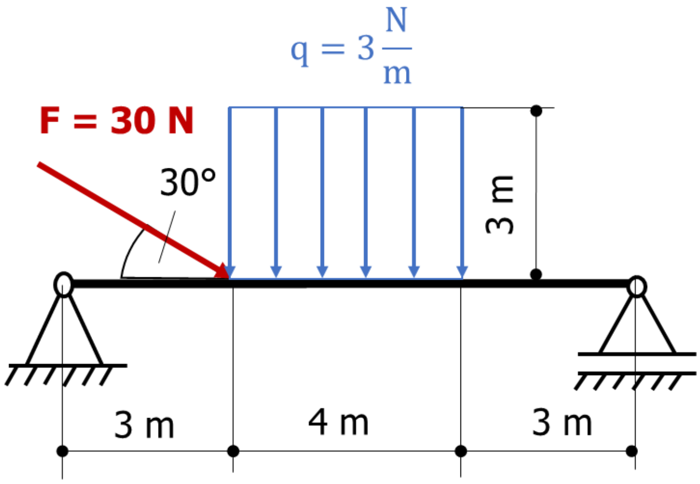


Abbildung 126: Berechnung Auflagerkräfte II

Aufgabe 6:

a) Schneide den oben abgebildeten gewichtslosen Einfeldträger zunächst frei.

b) Berechne nun die Auflagerreaktionen der beiden Lager.

Kopfnussaufgabe 6:

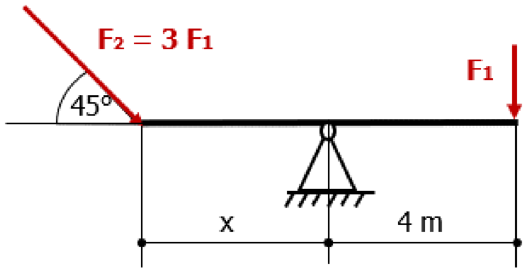


Abbildung 127: Übung Berechnung Auflagerkräfte

Berechne die Länge *x*, so dass sich der Balkon durch die Belastung nicht verdreht.

Tipp: Um ein Ergebnis zu erhalten, brauchst Du für die Kraft F_1 keinen konkreten Zahlenwert.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-7: Gelenkig durch die Statik

Bestimmen der statischen Bestimmtheit und Freischneiden von Gelenkträgern.

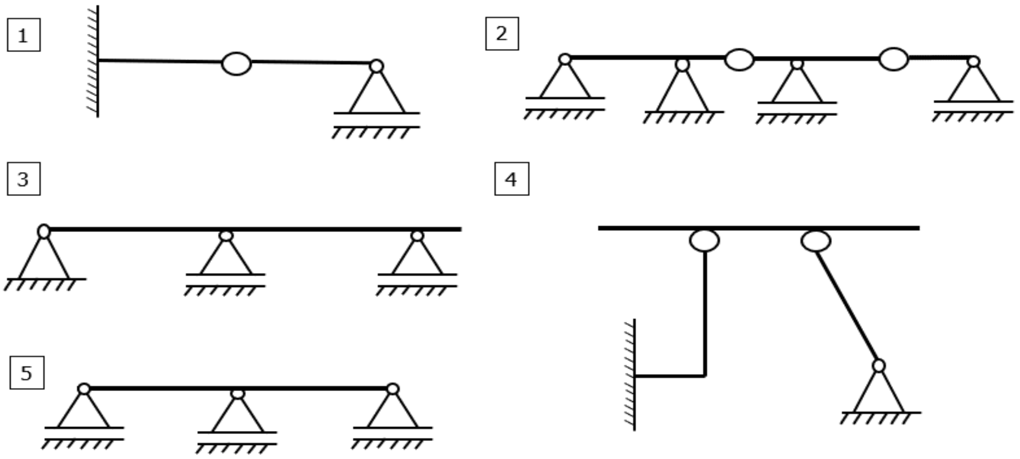


Abbildung 128: Träger

Aufgabe 7:

a) Bestimme mit Hilfe der Formel für die statische Bestimmtheit, ob die oben abgebildeten Körper statisch bestimmt, überbestimmt oder unterbestimmt sind.

b) Nenne die Aufgaben von Gelenken in der Statik.

c) Schneide die unten abgebildeten Gelenkträger frei.

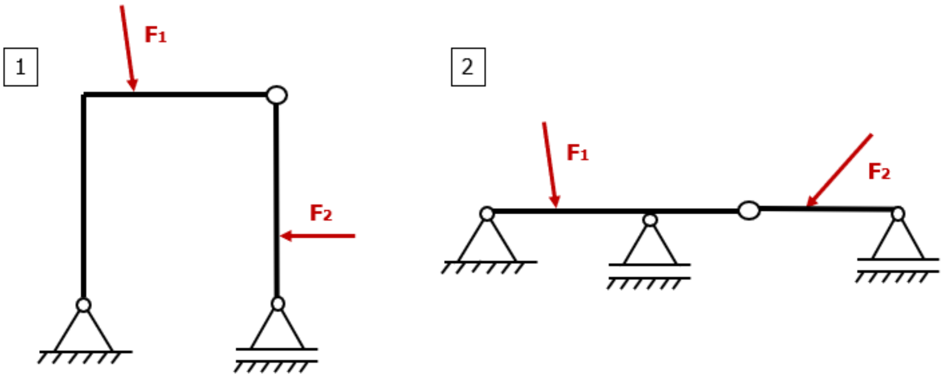


Abbildung 129: Beispiele Gelenkträger

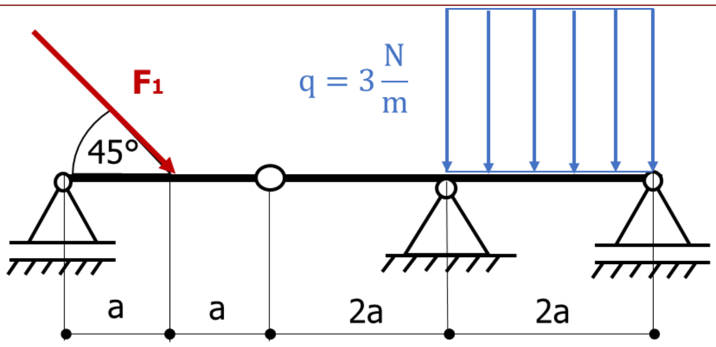
Kopfnussaufgabe 7:
Fällt dir ein Beispiel ein, bei der die Gleichung für die statische Bestimmtheit falsch ist? Begründe.

TIPP **Schaue Dir hierzu nochmal genau die Nummer 5 in Abbildung 128128128131 an.**

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-8: Gelenkreaktionen

Berechnen von Gelenkreaktionen.



$a = 1\ \text{m};\ F_1 = 10\ \text{N}$

Abbildung 130: Übung Gelenkträger

Aufgabe 8:

a) Schneide den Gelenkträger frei, indem du ihn in zwei Teilsysteme zerlegst.

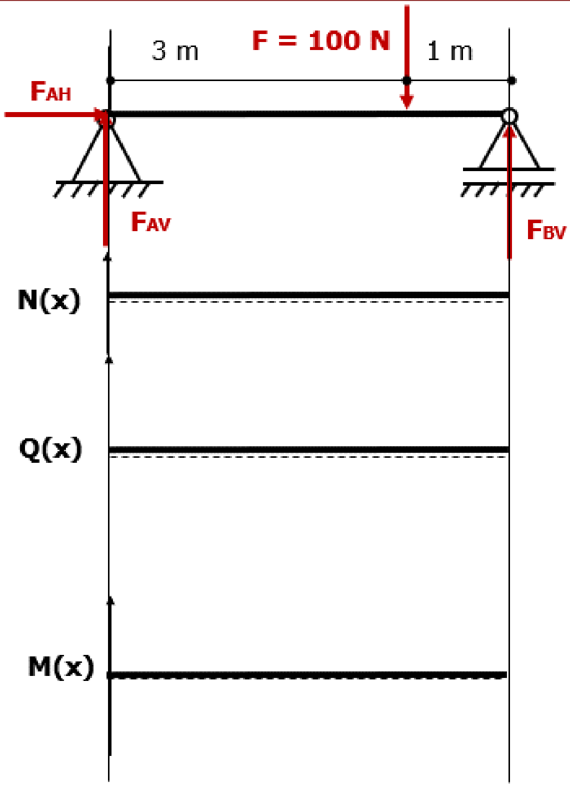
b) Dimensioniere alle Auflager- und Gelenkkräfte des oben abgebildeten Gelenkträgers.

Kopfnussaufgabe 8:
Anstatt des Momentengelenks wird in dem obigen Träger jetzt ein Normalkraftgelenk verbaut. Schneide erneut den linken Teil des Trägers frei und erkläre den Unterschied zwischen einem Momenten- und einem Normalkraftgelenk.

Aus dem Namen des Gelenks geht immer die Größe hervor, die nicht übertragen werden kann.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-9: Schnittgrößenverlauf I

	Bestimmung des Schnittgrößenverlaufs ohne Rechnen.
	 Abbildung 131: Übung Schnittgrößenverlauf I
?	**Aufgabe 9:** Überlege Dir zunächst, wie groß die Auflagerkräfte bei der gegebenen Belastung sein müssen. Zeichne dann die Schnittgrößenverläufe in die Abbildung ein. Gib die Extremwerte an.
TIPP	$$\frac{dM}{dx} = Q(x)$$
	Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-10: Schnittgrößenverlauf II

Bestimmung des Schnittgrößenverlaufs ohne Rechnen.

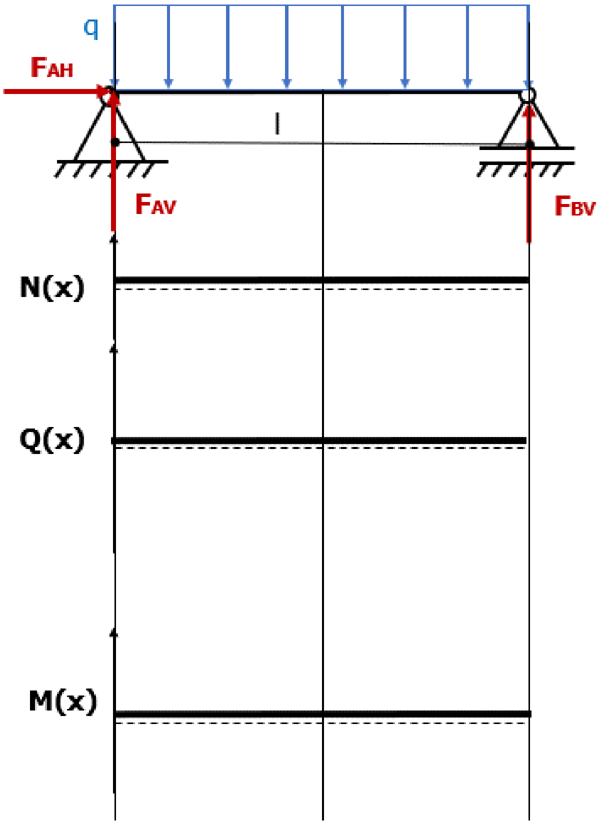


Abbildung 132: Übung Schnittgrößenverlauf II

Aufgabe 10:

Überlege Dir zunächst, wie groß die Auflagerkräfte bei der gegebenen Belastung sein müssen. Zeichne dann die Schnittgrößenverläufe in die Abbildung ein. Gib die Extremwerte an.

TIPP

$$\frac{dM}{dx} = Q(x)$$

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 7-11: Die Ingenieuraufgabe

Rechnerische Bestimmung des Schnittgrößenverlaufs durch Schneiden.

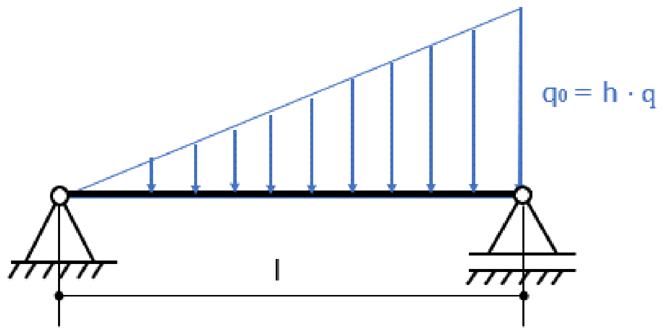


Abbildung 133: Schnittgrößenverlauf Dreiecksbelastung

Aufgabe 11

Dreieckslasten kommen in der Natur zum Beispiel durch einen Wasserdruck in einem Becken zustande. Berechne im Folgenden die Schnittgrößenverläufe des belasteten Einfeldträgers und zeichne diese jeweils in ein Diagramm ein. Orientiere Dich dabei an dem „Kochrezept für die Statik" (s. Kapitel 7.14) und arbeite dieses Schritt für Schritt ab. Beachte dabei unbedingt die Tipps für die jeweilige Nummer!

TIPP

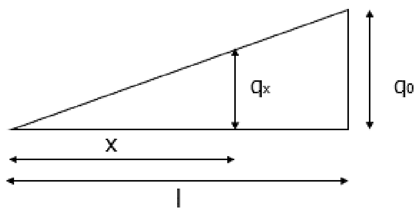
Tipps zum Kochrezept zur Statik bei einer Dreiecklast:

Zu 1.) Die Resultierende greift bei einer Dreiecklast bei dem Verhältnis 2/3 zu 1/3 des Balkens an.

Zu 3.) In diesem Beispiel werden bewusst keine konkreten Zahlenwerte angegeben. Berechne die Auflagerkräfte daher in Abhängigkeit von *l* und *q*.

Zu 4.) Es genügt, den Träger einmal innerhalb der Streckenlast zu schneiden. Achte hierbei darauf, dass Du in diesem Fall das positive Schnittufer betrachtest, so dass die Dreiecksform der Last erhalten bleibt.

Zu 5.) Beachte die Strahlensätze, wenn Du erneut die Resultierende bildest:



$$\frac{q_0}{l} = \frac{q_x}{x}$$

Abbildung 134: Strahlensätze

Hieraus erhältst Du die Gleichung für q_x, die Du wiederrum in die Gleichung für die Resultierende einsetzen musst.

Denke auch daran, die Extremwerte der Funktionen Q(x) und M(x) zu bestimmen.

.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Exkurs: Konstruktion eines Fachwerkcarports

Konstruktion eines Fachwerkcarports, Rechnen mit dem oktametrischen Maßsystem, Anfertigen einer technischen Zeichnung mit einem CAD-Programm, Analyse des Kräfteverlaufs und Fachwerkberechnung mittels des Knotenpunktverfahrens.

Konstruktionsaufgabe

Konstruiert als Gruppe für die Unterstellung eines Autos ein Modell für einen Fachwerkcarport. Berücksichtigt dabei die folgenden Bedingungen:

- Die Maße sollen genau den genannten Größen entsprechen: Länge: 6 m, Breite: 5,30 m, Lichte Raumhöhe ohne Dachkonstruktion: 3 m.
- Der Carport soll drei, nach dem oktametrischen Maßsystem berechnete, Fensteröffnungen, sowie eine Türe enthalten.
- An der kürzeren Seite des Carports befindet sich die Ein- und Ausfahrt für einen durchschnittlichen Kombi. Dimensioniert die Öffnung nach den typischen Größen für ein Garagentor (siehe Internet).
- Der Carport wird mit einem Flachdach aus Holz abgeschlossen. Dieses soll 20 cm an jeder Seite des Carports.

Materialien

- Holzleisten mit einem quadratischen Querschnitt (5 mm * 5 mm oder 8 mm * 8 mm)
- Holzleisten mit einem rechteckigen Querschnitt (5 mm * 10 mm oder 8 mm * 15 mm)
- Eine Unterlage (z.B. MDF-Platte) 300 mm * 400 mm oder je nach gewähltem Maßstab auch größer
- Säge mit Winkeleinstellungsmöglichkeit (am besten Kreissäge)
- Holzfeile
- Geodreieck oder rechter Winkel, Bleistift
- Sekundenkleber (oder Modellbaukleber) für Holzmaterialien

Arbeitsauftrag

- Überlegt Euch einen sinnvollen Maßstab für das Modellhäuschen.
- Plant Euer Carport unter Berücksichtigung der statischen Gesichtspunkte genau und fertigt eine technische Zeichnung dazu an (evtl. auch mit einem CAD-Programm).
- Die Fachwerkwände werden durch Windlasten von rechts und links angegriffen. Fertigt eine Skizze an, die verdeutlicht, wie die Lasten Eures Carports durch eine Fachwerkwand Eurer Wahl in den Untergrund abgeleitet werden. Erläutert Eure Gedankengänge kurz. (Zusatz: Simuliert diese Situation anschließend mit einer FEM-Analyse und wertet diese aus).
- Baut nun ein Modell der Fachwerkwand in Eurem ausgewählten Maßstab. Achtet darauf, dass zum Schluss alle Teile zu dem Carport zusammengesetzt werden müssen.
- Der Carport wird im Winter mit einer Schneelast von 180 kg/m² belastet. Berechnet die Kraft, die auf 4 beliebige Stäbe Eurer Fachwerkwand wirkt.

Kopfnussaufgabe 1:

Zusätzlich könnt Ihr noch Schmuckelemente in Eure Fachwerkkonstruktion einbringen.

Tipp: Berücksichtigt bei der Konstruktion die Hinweise des Skripts.

Alles bearbeitet? ☐

Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 8-1: Finite-Elemente-Methode (FEM-Analyse)

Spannungen in Werkstücken mit Hilfe eines CAD-Programms unter Last untersuchen.

Abbildung 135: T-Träger in der Baustatik

Aufgabe 1:

Träger werden in der Baustatik verwendet um Lasten, die beispielsweise durch das Gewicht der Decke zustande kommen, abzuleiten. In jedem Gebäude werden dabei Stützen und Träger mit einem sogenannten Doppel-T-Profil eingebaut. Der Name kommt daher, dass der Träger T-förmig ist. T-Träger weisen trotz geringem Materialeinsatz eine hohe Biegesteifigkeit auf und sind nicht knickgefährdet. Dennoch haben sie einige Schwachstellen, die, um einen Einsturz des Gebäudes zu verhindern, ausreichend dimensioniert werden müssen …

a) Konstruiere mit einem CAD-Programm einen Doppel-T-Träger mit dem Profil IPE 500. Die Maße kannst Du in der anhängenden Kennwerttabelle der IPE-Profile nachsehen. Die Bohrungen können vernachlässigt werden. Führe anschließend eine FEM-Analyse unter den in Abbildung 134 aufgezeigten Bedingungen durch:

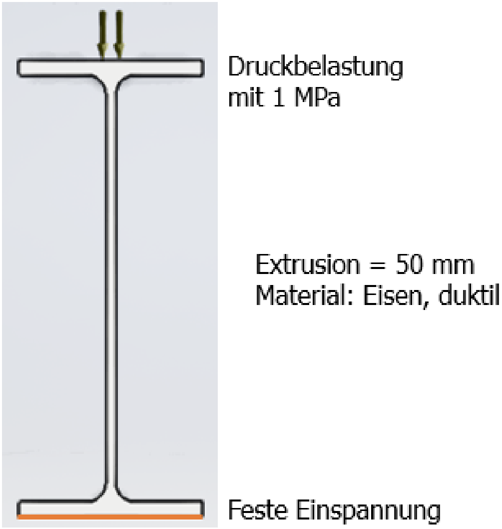


Abbildung 136: Doppel-T-Träger Analyse

b) Analysiere die Schwachstellen des T-Trägers.

c) Ermittle, mit welcher resultierenden Kraft der Träger belastet wird.

d) Wie könnten die Schwachstellen vermieden werden? Versuche den T-Träger durch geschickte Materialanlagerung zu optimieren und führe erneut eine FEM-Analyse durch. Dokumentiere Deine Ergebnisse.

e) Nach jahrelanger Forschungsarbeit haben Ingenieure die Zugdreiecksmethode zur Optimierung von Kerben entwickelt. Konstruiere jeweils drei Zugdreiecke und füge sie in die Kerben ein. Nenne die Vorteile dieser Materialanlagerung.

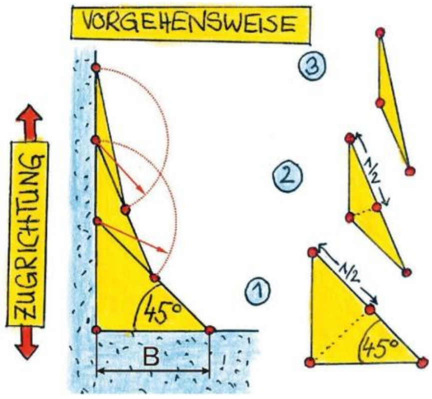


Abbildung 137: Zugdreiecksmethode (Bild: KIT)

Kopfnussaufgabe 1:

Die Zugdreiecksmethode wurde anhand von Vorbildern aus der Natur entwickelt, also bionisch. Nenne Strukturen in der Natur, die nach dem Zugdreiecksprinzip aufgebaut sind.

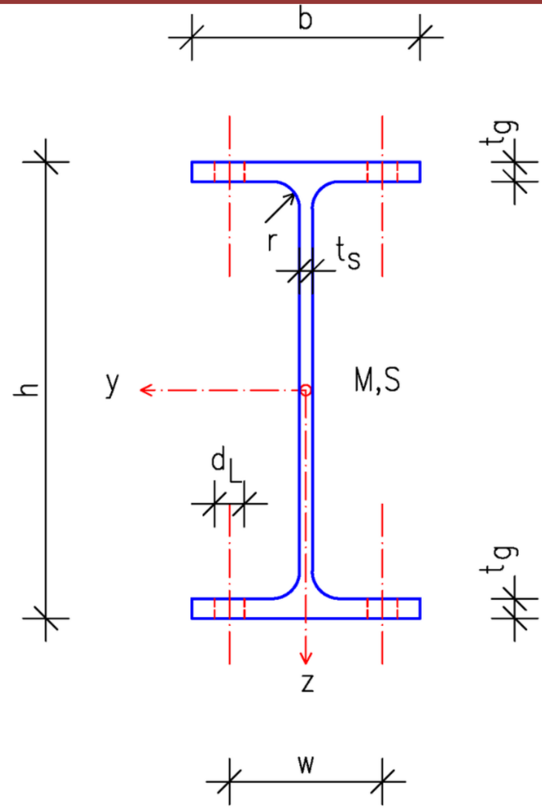
TIPP

Bäume haben über Jahrmillionen sehr stabile Strukturen entwickelt …

Alles bearbeitet? ☐

Ergebnis kontrolliert? ☐

Kennwerttabelle (Auszug)



IPE Profil	Abmessungen									Löcher	
	h mm	**b** mm	**t_s** mm	**t_g** mm	**r** mm	**A_{Steg}** cm²	**A** cm²	**Masse** kg/m	**U** m²/m	**d_L** mm	**w** mm
330	330	160	7,5	11,5	18	23,89	62,61	49,15	1,254	21	95
360	360	170	8,0	12,7	18	27,78	72,3	57,09	1,353	25	107
400	400	180	8,6	13,5	21	33,24	84,46	66,3	1,467	25	114
450	450	190	9,4	14,6	21	40,93	98,82	77,57	1,605	28	121
500	500	200	10,2	16,0	21	49,37	115,5	90,68	1,744	28	122
550	550	210	11,1	17,2	24	59,14	134,4	105,5	1,877	28	129

Blatt 8-2: Spannungs-Dehnungs-Diagramme

Arbeiten mit Spannungs-Dehnungs-Diagrammen und Bedeutung der Kennwerte.

Aufgabe 2:

a) Skizziere jeweils ein Spannungs-Dehnungs-Diagramm für einen duktilen und einen spröden Werkstoff, beschrifte alle relevanten Bereiche und zeichne alle wichtigen Werkstoffkennwerte ein.

b) Erkläre den unterschiedlichen Verlauf für duktile und spröde Materialien

Kopfnussaufgabe 2:

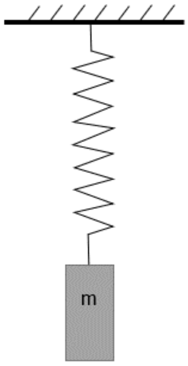
Gegen Ende des Verlaufs flacht das Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines duktilen Werkstoffs merklich ab, obwohl bei steigender Belastung die Spannung im Bauteil größer werden müsste. Erläutere, welche messtechnische Annahme diesen Verlauf verursacht.

Die Spannung wird auf der y-Achse und die Dehnung auf der x-Achse aufgetragen.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 8-3: Das Hookesche Gesetz

Einen Versuch zum Verständnis des Hookeschen Gesetzes durchführen.



Materialien

- 2 Spiralfedern mit unterschiedlicher Härte (zulässige Höchstbelastung der Federn: weiche Feder: 450 g, harte Feder 1000 g)
- Stativmaterial
- Massestücke (50 g und 400 g)
- Lineal

Abbildung 138: Belastete Feder

Aufgabe 3:

a) Belaste die weiche Feder in 50 g Schritten mit Gewichten, bis Du ein Gesamtgewicht von 250 g erreicht hast. Führe dasselbe mit der harten Feder in 200 g Schritten bis zu einem Gewicht von 1000 g durch. Als Referenz wird der unbelastete Zustand verwendet. Trage Deine Messwerte in die untere Tabelle ein.

Weiche Feder		Harte Feder	
Masse [kg]	Federlänge [cm]	Masse [kg]	Federlänge [cm]
0		0	

b) Führe folgende Berechnung nur für die weiche Feder durch: Teile die Masse m durch die Auslenkung s (die Auslenkung ist die Federlänge im belasteten Zustand abzüglich der Federlänge im unbelasteten Zustand). Was stellst Du fest?

c) Berechne aus der Masse die Gewichtskraft F_G Ermittle auch die Dehnung der Federn. Trage Deine Ergebnisse wieder in die Tabelle ein.

Weiche Feder		Harte Feder	
Spannung [$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$]	Dehnung []	Spannung [$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$]	Dehnung []

d) Erstelle aus den Angaben nun für jede Feder ein Kraft-Dehnungsdiagramm. Stelle eine Vermutung auf, was für eine Form die Kurve annehmen wird.

Kopfnussaufgabe 3:

Begründe, warum die Federn nicht über ihre zulässige Höchstbelastung hinaus belastet werden dürfen.

TIPP

Bei der Lösung der Aufgabe hilft dir der plastische Dehnungsbegriff.

	Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 8-4: Zug- und Druckbeanspruchung

Berechnen der Spannung und Dehnung in verschiedenen Stützenquerschnitten.

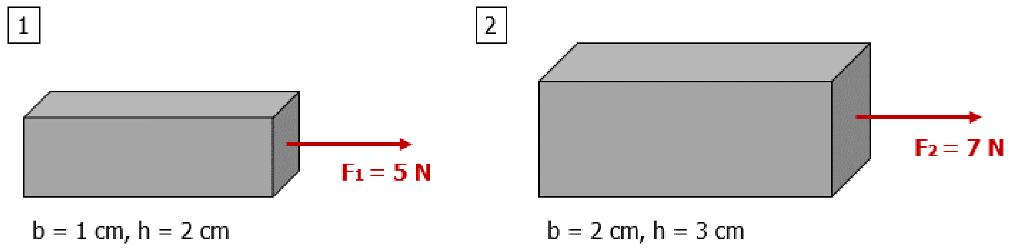


Abbildung 139: Spannungsberechnung Rechteck

Aufgabe 4:

a) Auf die zwei Stützen mit unterschiedlicher Querschnittsfläche wirken die beiden Zugkräfte F_1 und F_2 im Schwerpunkt. Berechne, welche Stütze stärker beansprucht wird.

b) Anstatt des rechteckigen Profils verwendet man jetzt eine kreisförmige Stütze mit einem Durchmesser von $d = 6$ mm. Diese wird wieder mit einer Kraft von $F = 5$ N belastet.

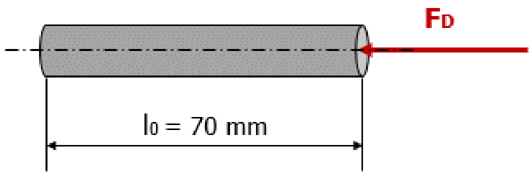


Abbildung 140: Spannungsberechnung Stab

Berechne die Druckspannung und ermittle, um welchen Betrag der Stab nach Innen gedrückt wird, wenn die Dehnung $\varepsilon = 0{,}02$ beträgt.

c) Eine Stütze mit einer Länge von 200 mm verlängert sich bei einer Zugbelastung um 1 cm. Wie groß ist die Dehnung? Die Stütze besteht aus Grauguss (E-Modul = 100.000 $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$). Berechne zudem die Spannung in der Stütze.

d) Berechne die Dehnung für den unten abgebildeten Stahlstab mit den folgenden Belastungen:

$F = 2000$ kN

$E = 210.000\ \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{mm^2}}$

d_0 = 70 mm

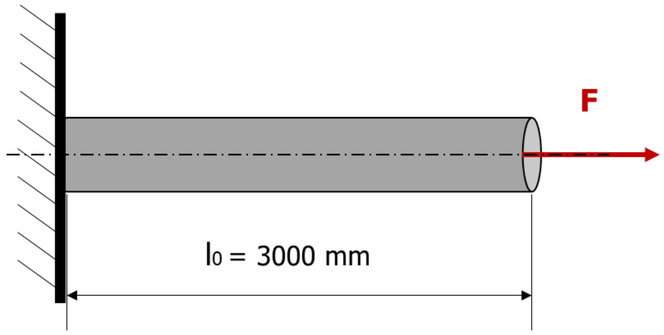


Abbildung 141: Dehnungsbestimmung Stahlstab

TIPP

Für die Lösung der Aufgabe brauchst du die beiden Formeln

$\boldsymbol{\sigma = \frac{F}{A}}$ **und** $\boldsymbol{\sigma = \varepsilon \cdot E}$**.**

Alles bearbeitet? ☐ | Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 8-5: Bitte nicht geknickt sein …

Beschreiben und Nutzen der Euler´schen Knickfälle.

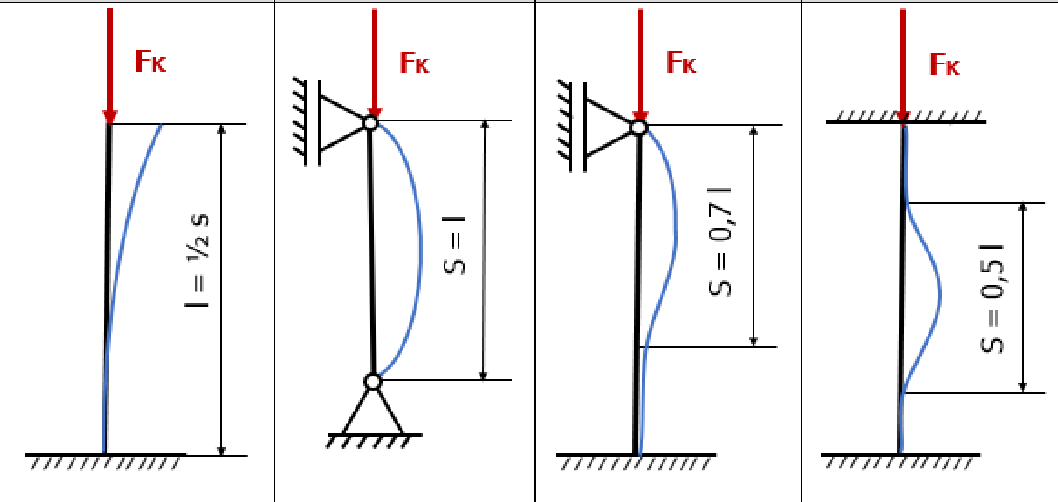
Knickfall 1	Knickfall 2	Knickfall 3	Knickfall 4
			
s_K = 2l	s_K = l	s_K = 0,7l	s_K = 0,5l
$F_K = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$	$F_K = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$	$F_K = 2\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$	$F_K = 4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$

Abbildung 142: Euler´sche Knickfälle

Aufgabe 5:

a) Nenne die Faktoren, von denen die Knickkraft abhängig ist.

b) Vervollständige die Sätze…

Je länger ein Stab, desto ______________________________________

Je höher der E-Modul, desto ______________________________________

	c) Fülle die Lücken aus: Wird ein Bauteil auf Zug beansprucht, so kann es seine Funktion sicher erfüllen, solange die ____________________________ unter der Dehngrenze des Werkstoffs bleibt. Bei einem unter Druck beanspruchten Stab, kann sowohl ________________span-nung, als auch ___________spannung entstehen. Die Gefahr dabei ist, dass ein Bauteil bereits vor Erreichen der ________________________________ seitlich ______________________________ kann. Vor allem ________________________ Stützen neigen dazu zu knicken. Damit die Sicherheit trotzdem gewährleistet ist, muss die __________________________ immer unter der vorhandenen Spannung bleiben. Die Festigkeit eines knickgefährdeten Stabes kann vor allem durch die ____ beeinflusst werden. Hierzu hat __________________ vier Gleichungen entwickelt, mit denen man die ______________________ in Abhängigkeit von der ______________________________ ermitteln kann. d) Beschreibe die vier Euler´schen Knickfälle in eigenen Worten. Die Abbildung 142142142146 zu den Knickfällen soll Dir dabei helfen. Gehe vor allem auf die Lagerungsverhältnisse und die Knicklänge ein.

e) Beurteile, welcher der Knickfälle theoretisch am stabilsten ist. Gehe davon aus, dass alle anderen die Knickung beeinflussenden Faktoren gleich sind. Vervollständige anschließend die Regel „Je geringer die Knicklänge, desto …".

f) Das Wievielfache kann die Stütze nach Eulerfall 4 im Vergleich zu Eulerfall 1 tragen? Erläutere.

g) Begründe, warum in der Praxis am häufigsten die zweite Einspannungsart eingesetzt wird.

Kopfnussaufgabe 4:
Erläutere, warum in der Praxis nur selten die Einspannungsarten 3 oder 4 eingesetzt werden.

Überprüfe die Eulerfälle auf ihre statische Bestimmtheit.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 8-6: Auf Biegen und Brechen

Berechnung der Biegespannung und ihre Anwendung, Festigkeitsberechnung.

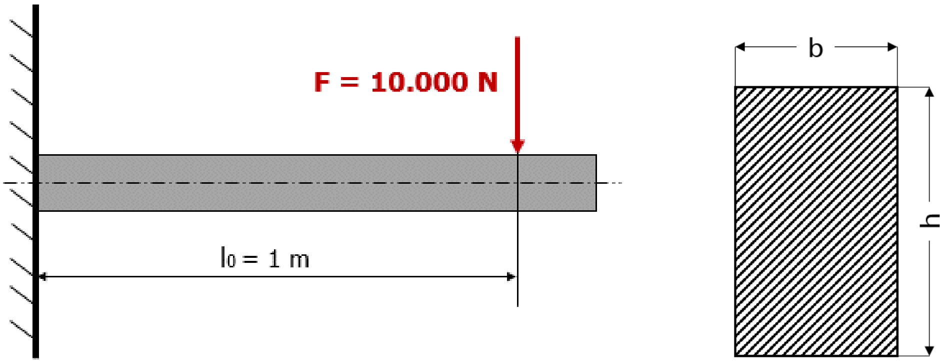


Abbildung 143: Beispiel Biegespannung

Aufgabe 6:

a) Ein Wandträger (b = 5 cm; h = 10 cm) wird mit der Kraft F = 10 kN belastet. Berechne die Biegespannung für den skizzierten Querschnitt.

b) Vergleiche die Spannungsverteilung über den Querschnitt bei einer Zug- und Biegebeanspruchung.

c) Begründe unter Einbezug des Biegemomentes den Querschnitt der Träger in der Reithalle.

Abbildung 144: Reithalle

d) Erläutere, was für Folgen es für die Biegespannung hat, wenn das Widerstandsmoment besonders groß ist.

Kopfnussaufgabe 5:

Ein Stab aus unlegiertem Baustahl S275JR mit einem Kreisquerschnitt hat eine Betriebskraft von F = 10 kN aufzunehmen. Welchen Radius muss der Stab mindestens aufweisen, damit die Festigkeitsbedingung erfüllt wird? Berechne.

(Für S275JR gilt: R_e = 275 MPa; R_m = 410 MPa; $\nu_F = 1{,}5$; $\nu_B = 2$)

Festigkeitsberechnung: $\sigma \leq \sigma_{zul}$ bzw. $\frac{F}{A} \leq \frac{K}{S}$

Alles bearbeitet? ☐

Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 8-7: Bewehrungen, die sich bewährt haben

Optimierung und Konstruktion eines Betonbalkens für einen Wintergarten.

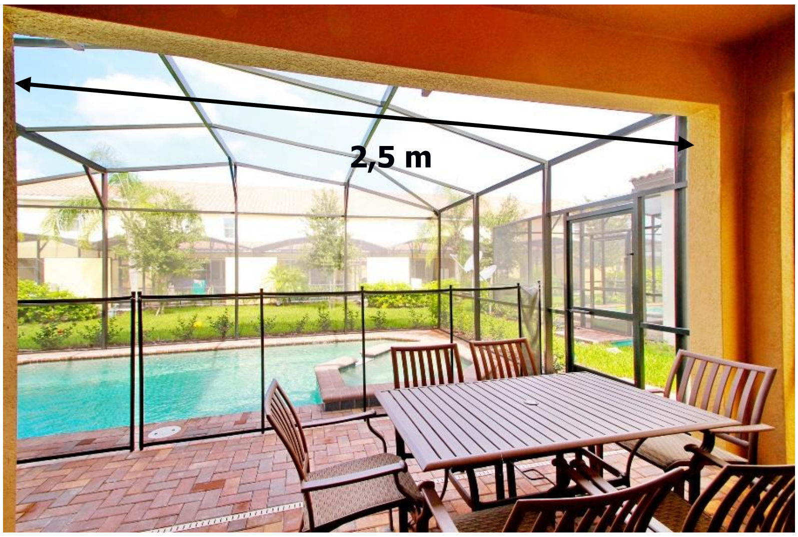


Abbildung 145: Wintergarten

Aufgabe 7:

Bei einem Haus soll vom Esszimmer ein direkter Zugang zu einem Wintergarten vorhanden sein. Die dafür nötige Wandöffnung hat eine Länge von 2,50 m. Ein Betonbalken muss die Belastung durch die darüber liegende Decke aufnehmen und diese Kräfte in das Mauerwerk übertragen.

a) Erläutere, welcher Belastungsart der Balken ausgesetzt ist. Fertige eine Skizze mitsamt Auflager an.

b) Erkläre, was passieren wird, wenn der Betonbalken zu stark belastet wird. Zeichne hierzu eine Skizze mit den entstehenden Zug- und Druckkräfte und den Rissen, die entstehen.

Beton als Werkstoff kann stark auf Druck, aber nur gering auf Zug beansprucht werden.

c) Die Streckenlast, die den Balken belastet, beträgt q = 1000 N/m. Der Balken ist 30 mm breit und 55mm hoch. Die zulässige Biegespannung liegt bei maximal 12 N/mm². Ist der Betonbalken ausreichend dimensioniert, um die Massivdecke zu halten? Berechne und begründe.

Die Formel für das Moment lautet in diesem Fall: $M_b = \frac{q \cdot l^2}{8}$

d) Zur Verbesserung der Zugfestigkeit des Betons werden in der Baustatik sogenannte Bewehrungen eingesetzt. Als Bewehrung bieten sich hier zwei Stäbe aus Stahl an, die in den Betonbalken eingebracht werden. Skizziere wo die zwei Stäbe am besten eingesetzt werden sollten, um die Festigkeit des Balkens zu erhöhen. Begründe deine Entscheidung.

Kopfnussaufgabe 6:

Leite die oben angegebene Formel für das Biegemoment her:

$$M_b = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

Schaue Dir nochmal die Aufgaben zu den Schnittgrößenverläufen in der Statik an.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 8-8: Festigkeitsberechnung

Arbeiten mit Festigkeitskennwerten, Spannungs-Dehnungs-Diagrammen und Festigkeitsberechnungen zur Dimensionierung einer Betonstütze und eines Stahlseils.

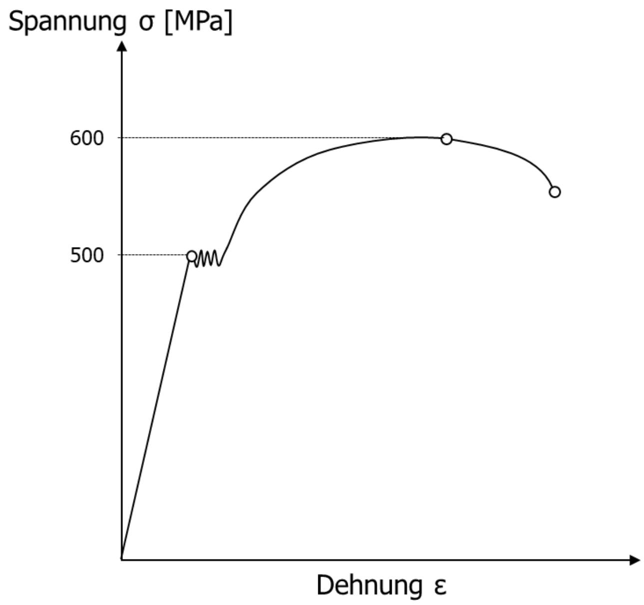


Abbildung 146: Spannungs-Dehnungs-Kurve von Betonstahl

Aufgabe 8:

Betonstahl wird überwiegend im Bau verwendet. Er wird in die Betonkonstruktion eingebracht und verstärkt diese. Die Festigkeitseigenschaften hängen vor allem von der Zugfestigkeit des Betonstahls ab. Diese kann durch Zugversuche ermittelt und daraufhin in einem Diagramm dargestellt werden.

a) Analysiere, in welchen Bereichen eine elastische und wo eine plastische Dehnung des Betonstahls stattfindet und zeichne diese in Abbildung 146146146 ein. Zeichne auch die Streckgrenze/0,2 %-Dehngrenze und die Zugfestigkeit ein.

b) Ermittle aus der Spannungs-Dehnungs-Kurve, wie stark Betonstahl maximal auf Zug belastet werden kann, ohne sich langfristig zu verformen.

Abbildung 147: Überdachungsprojekt Universität Stuttgart Vaihingen

c) Die Universität Stuttgart hat eine Firma mit der Überdachung eines Teils des Universitätsgeländes beauftragt. Es werden runde Stahlbetonstützen eingesetzt, um die Last der später hinzukommenden Decke aufzunehmen. Fertige eine Skizze an, wie die Stützen gelagert werden sollten. Begründe welchem Eulerfall diese Lagerung entspricht.

d) Im Sommer dehnt sich das Material um ca. 0,1 mm pro Meter und Kelvin aus. Berechne die Spannung, wenn die Temperatur um 10 Kelvin ansteigt und die Stützen eine Länge von 2,5 m haben. Ist Deine Lagerung für so eine Belastung geeignet? Begründe.

e) Eine Stütze müsste für die Überdachung 118 kN aufnehmen. Da die Stützen ausschließlich auf Druck belastet sind, spielt hauptsächlich die Druckfestigkeit des Betons eine Rolle (C60 Schwerbeton mit Druckfestigkeit 60 N/mm²). Dimensioniere rechnerisch den Radius der Stütze aus Beton mit ausreichender Sicherheit. Nenne die Versagensarten, die bei dieser Belastung auftreten können.

f) Der Planer überlegt sich, die Überdachung als Hängekonstruktion zu realisieren. Ein Stahlseil müsste dafür 245 kN aufnehmen. Dimensioniere rechnerisch den Radius des Seils mit ausreichender Sicherheit so, dass die Materialfestigkeit nicht überschritten wird. Nenne die Versagensarten, die bei dieser Belastung auftreten können.

(Stahl: E360| R_e = 360 MPa| R_m = 670 MPa)

Kopfnussaufgabe 7:

Auch eine Werkzeugmaschinenspindel wird mit einem Fest- und einem Loslager gelagert. Hast Du eine Idee, wo das Loslager liegen sollte, um die Genauigkeit der Maschine nicht zu beeinträchtigen? Begründe.

TIPP

Festigkeitsberechnung: $\sigma \leq \sigma_{zul}$ bzw. $\frac{F}{A} \leq \frac{K}{S}$

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Exkurs: Leichtbau aus dem 3D-Drucker?

Überlegungen zur Leichtbaufertigung mit dem 3D-Drucker und Versuchsaufbau zur vergleichenden Messung der Biegefestigkeit.

Für die fertigungstechnische Realisierung eines auf Biegung belasteten Leichtbauteils mittels 3D-Druck hast Du verschiedene Möglichkeiten zur Anordnung des Bauteils auf der Druckfläche. Du druckst einen rechteckigen Balken (s. Abbildung 148148148152) mit den Maßen 150 mm x 20 mm x 7,5 mm in drei unterschiedlichen Positionen und möchtest experimentell ermitteln ob die Druckposition bei 20 % Ausfüllungsgrad einen Einfluss auf die Biegefestigkeit des Bauteils hat.

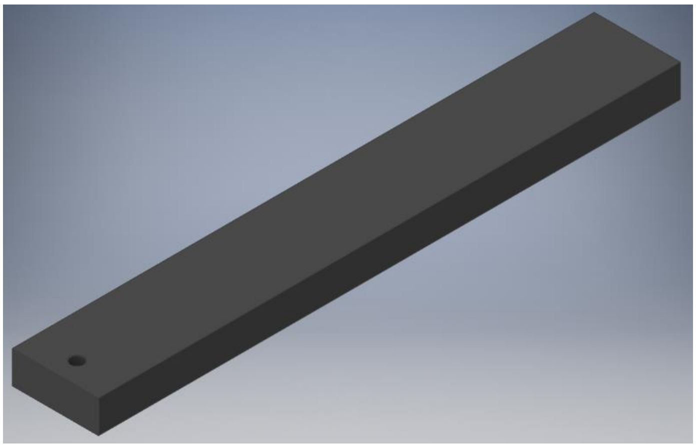


Abbildung 148: Zu untersuchendes Bauteil

Für den Versuchsaufbau stehen dir folgende Materialien zur Verfügung:
Schraubzwinge, Federkraftmesser 50N/100 N, Garn, Stativ mit Zubehör, gerader Stab, Messschieber, Tischplatte

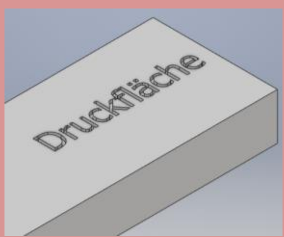
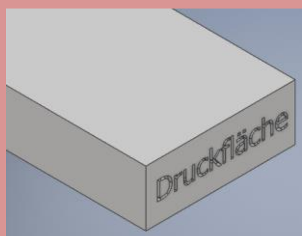
Aufgabe 1:

Entwickle und skizziere einen möglichen Versuchsaufbau zur Ermittlung des Flächenmoments der drei Balken unter Biegebeanspruchung.

Aufgabe 2:

Führe mit Deinem Versuchsaufbau jeweils **fünf** Messungen pro Bauteil durch und dokumentiere die Messerwerte in der nachfolgenden Tabelle.

Tabelle 21: Messwerte der drei Biegeversuche

Messung	**Breite lange Seite** 	**Schmale lange Seite** 	**Schmale kurze Seite** 
1			
2			
3			
4			
5			
$\emptyset F$			
I			

Kopfnussaufgabe 1:

Vergleiche die gemessene Kraft bei der Biegung der Balken mit der FEM-Simulation eines fest fixierten 135 mm langen und ansonsten identischen Rechteck-Hohlprofils (Wandstärke 1 mm) mit 20 % Ausfüllungsgrad. Erkläre, weshalb sich dieses Profil stellvertretend für das Bauteil mit Netzstruktur für die Simulation eignet.

Aufgabe 3:

Überlege dir einen Optimierungsvorschlag für den Leichtbau-Balken mit 20 % Ausfüllung. Er soll stabiler gegen Biegebeanspruchung werden.

Flächenmomente zusammengesetzter Bauteile mit identischer Achsrichtung dürfen addiert werden.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 9-1: Drehzahl, Drehmoment und Leistung von Motoren

Berechnung der Leistung und des Wirkungsgrades eines Elektromotors, Bestimmung der Leistungs- und Wirkungsgradlinie, Berechnung der maximalen Geschwindigkeit.

Tabelle 22: Ermittelte Kennwerte des GreenTeam-Elektromotors

n [1/Min]	50	1000	2000	4000	6000	8000
M [Nm]	27,82	26,63	26,12	25,82	26,01	25,88
P_{el} [W]	3256,5	6144,7	8800,3	14761,6	20284,3	25925,5

n [1/Min]	10000	12000	14000	16000	18000	20000
M [Nm]	25,49	23,86	25,42	22,37	20,10	17,81
P_{el} [W]	31477,7	34170,2	43059,1	41982,8	41230,7	40726,2

Aufgabe 1:

Die obige Tabelle gibt die erfassten Daten des Prüfstands für den neuen GreenTeam-Elektromotor bei dem durchgeführten Testlauf wieder.

a) Bestimme aus den Messdaten die Leistungskennlinie des Elektromotors. Berechne hierzu zunächst die entsprechenden Leistungen bei den gegebenen Drehzahlen (exemplarisch reicht die ausführliche Berechnung einer Leistung aus) und trage sie in die Tabelle ein.

n [1/Min]	50	1000	2000	4000	6000	8000
P_{nutz}[W]						

n [1/Min]	10000	12000	14000	16000	18000	20000
P_{nutz}[W]						

b) Beschreibe die Leistungskennlinie des Elektromotors genauer und nenne die Unterschiede zu einem Verbrennungsmotor.

c) Berechne die Wirkungsgrade bei den einzelnen Drehzahlen (exemplarisch reicht die ausführliche Berechnung eines Wirkungsgrades aus). Trage die Werte in die Tabelle ein. Zeichne hierzu die Wirkungsgradkennlinie. Ermittle daraus den maximalen Wirkungsgrad.

n [1/Min]	50	1000	2000	4000	6000	8000
η [%]						

n [1/Min]	10000	12000	14000	16000	18000	20000
η [%]						

Kopfnussaufgabe 1:

Berechne die maximale Geschwindigkeit, die das GreenTeam-Rennfahrzeug in der nächsten Saison fahren kann, wenn die Übersetzung des Getriebes i = 1/13,5 und der Radradius r = 21 cm betragen?

Tipp: Für die Geschwindigkeit gilt: $v = \omega \cdot r$, außerdem musst Du das Ergebnis noch mit der Umsetzung des Getriebes i multiplizieren.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 10-1 Was bremst denn da?

Die Herleitung der Formel für die Reibungskraft.

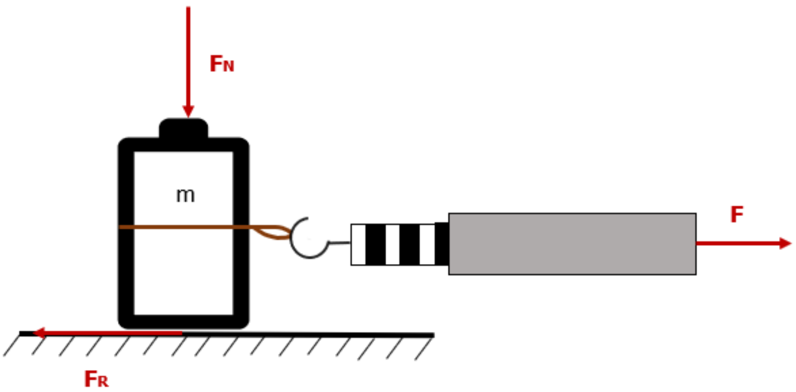


Abbildung 149: Reibungskraft
(angelehnt A. Böge 1990, S. 79)

Aufgabe 1:

Ein Gewicht mit einer Schlinge steht auf einem feststehenden Tisch. Befestige an der Schlinge einen Kraftmesser und ziehe vorsichtig daran.

a) Fange mit einer Masse von 1 kg an. Versuche, kurz bevor der Klotz anfängt sich zu bewegen, die benötigte Kraft abzulesen. Ziehe nun weiter an dem Klotz, bis er in Bewegung versetzt wird und notiere die dafür benötigte Kraft. Achte darauf, dass der Kraftmesser, wenn Du daran ziehst, parallel zum Tisch ausgerichtet ist. Erläutere, um welche Reibungskraft es sich hierbei handelt.

b) Wiederhole das Experiment mit der Masse m = 2 kg und 4 kg. Messe die Kraft die nötig ist, um den Klotz in Bewegung zu versetzen. Beschreibe, welchen Zusammenhang Du zwischen Gewichts- bzw. Normalkraft erkennen kannst.

c) Benutze nun als Unterlage die Lederfolie. Messe wieder die Kraft. Was kannst Du beobachten? Erkläre durch welchen Parameter das Material in der Formel für die Reibungskraft mit einbezogen wird.

Kopfnussaufgabe 1:

Die beiden Klötze haben die gleiche Masse und bestehen, wie auch die jeweilige Unterlage, aus demselben Material. Begründe, bei welchem der Körper eine höhere Kraft aufgewendet werden muss, um ihn einen Meter nach rechts zu ziehen.

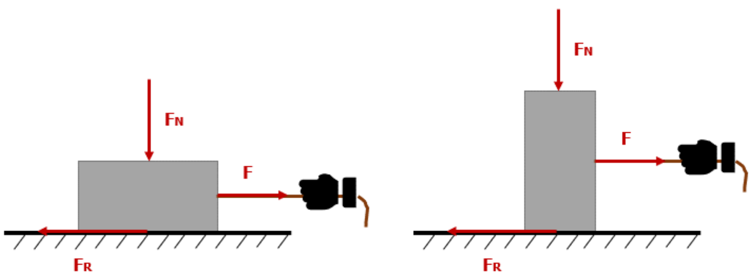


Abbildung 150: Reibungskraft

(angelehnt an H. Herr 1991, S. 98.)

Tipp: Die Formel für die Gleitreibungskraft lautet:

$$F_R = \mu_R \cdot F_N$$

Alles bearbeitet? ☐

Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 10-2: Haft- und Gleitreibung I

Vereinfachte Rechnungen mit der Reibungsformel.

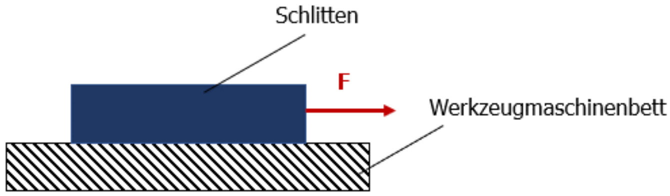


Abbildung 151: Reibungskraft

(angelehnt A. Böge 1990, S. 79)

Aufgabe 2:

Der Schlitten einer Werkzeugmaschine mit der Masse m = 50 kg liegt auf dem ebenen Maschinenbett. Der Haftreibungskoeffizient beträgt 0,7 und der Gleitreibungskoeffizient 0,5.

a) Berechne wie groß die Kraft F sein muss, damit der Ruhezustand gerade so aufgehoben wird.

b) Wie groß muss F sein, um eine gleichförmige Bewegung aufrecht zu erhalten? Berechne.

c) Während die Werkzeugmaschine produziert, wirken noch weitere Kräfte auf den Schlitten ein. Ermittle die Masse m des Schlittens, so dass die Reibungskraft während der Bewegung nicht größer als 300 N wird.

Kopfnussaufgabe 2:

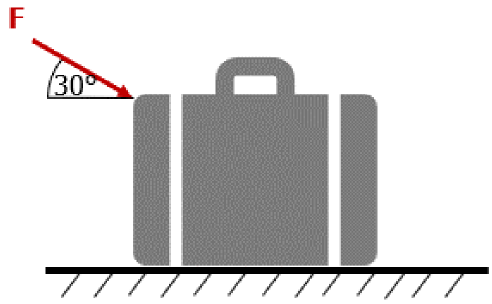


Abbildung 152: Reibungsbeispiel Koffer

Ein Koffer mit einer Gewichtskraft von F_G = 2000 N soll in horizontaler Richtung verschoben werden. Berechne die nötige Kraft F, so dass sich der Körper in Bewegung versetzt.

Tipp: Die Horizontalkomponente von F muss mindestens so groß wie die Haftkraft sein. Beachte außerdem, dass F_N in diesem Fall auch die Vertikalkomponente von F beinhalten muss.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 10-3: Haft- und Gleitreibung II

Vereinfachte Rechnungen mit der Reibungsformel.

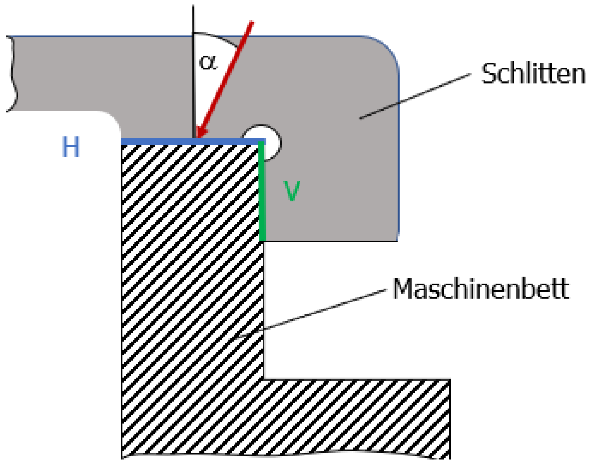


Abbildung 153: Reibungskraft
(angelehnt an H. Herr 1991, S. 99)

Aufgabe 3:

Die Abbildung zeigt eine Werkzeugmaschinenführung. Diese wird durch eine schräge Kraft $F = 200$ N belastet. Der Winkel α beträgt 25° und der Reibungskoeffizient $\mu = 0{,}1$.

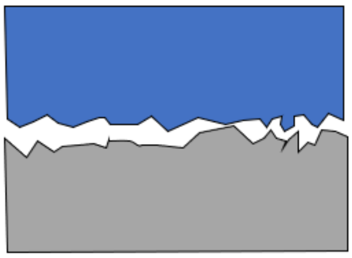
a) Berechne, wie groß die Normalkräfte auf den Flächen H und V sind.

b) Ermittle, wie groß die Reibungskräfte an diesen Flächen sind.

c) Berechne die gesamte Reibungskraft, die zu einer Verschiebung führt.

Kopfnussaufgabe 3:

Warum bedarf es einer größeren Kraft die Haftreibung zu überwinden, wenn die beiden Körper gegeneinander verschoben werden, als eine bestehende Bewegung beizubehalten? Betrachte hierzu die Abbildung und begründe.



1 cm ≙ 1 µm

Abbildung 154: Oberflächen

Tipp: Schaue Dir die Beschaffenheit der Oberflächen genauer an.

Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Blatt 10-4: Einfach mal rollen lassen …

Vereinfachte Rechnungen zum Rollwiderstand.

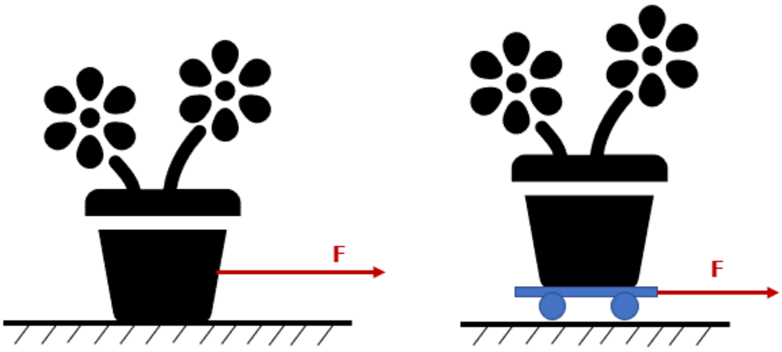


Abbildung 155: Rollwiderstand

Aufgabe 4:

Anna möchte im Sommer den schweren Blumentopf mit einer Masse *m* von 20 kg aus der Wohnung auf den Balkon stellen.

a) Zunächst versucht sie den Topf durch ziehen vorwärts zu bewegen. Berechne, wie groß hierbei die Haft- und Gleitreibung ist. (μ_0 = 0,5; μ_R = 0,3)

b) Nach einer Weile gehen Anna die Kräfte aus und sie kauft ein kleines Wägelchen mit vier Rollen, auf den sie den Blumentopf stellt. Der Durchmesser der Rollen beträgt 5 cm. Berechne, wie groß die Reibungszahl ist, wenn *f* = 0,5 cm.

c) Berechne die gesamte Reibungskraft und die Reibungskraft pro Rolle.

d) Hat sich der Kauf des Wägelchens für Anna gelohnt? Begründe.

Kopfnussaufgabe 4:

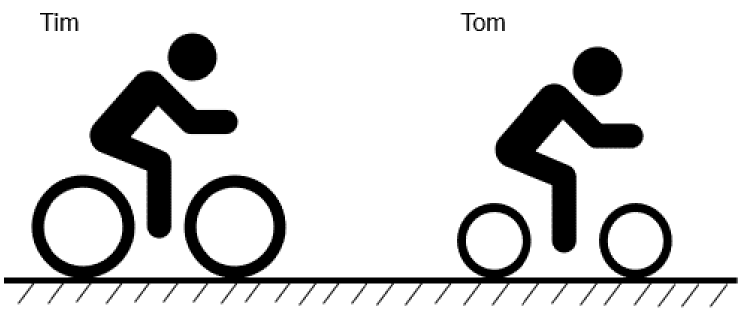


Abbildung 156: Rollwiderstand Fahrräder

Tim und Tom machen eine Fahrradtour. Im Gegensatz zu Toms Räder, sind Tims deutlich größer. Überlege Dir, ohne zu rechnen, wer von den beiden einen größeren Rollwiderstand überwinden muss. Erläutere Deine Überlegungen.

Tipp: Ziehe in Deine Überlegungen die Formel für den Rollwiderstand mit ein.

Alles bearbeitet? ☐ Ergebnis kontrolliert? ☐

Exkurs: Einen reibungslosen Ablauf durch Lager

Die Kenntnisse über Lager anwenden, Lagerkräfte und Rollwiderstand berechnen, einen Festigkeitsnachweis durchführen und eine passende Lagerart aus einem Lagerkatalog mittels einer Lagerberechnung auswählen.

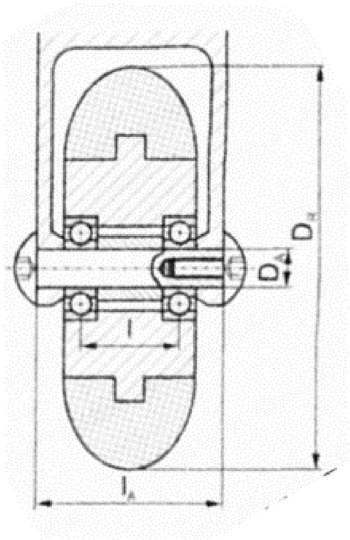
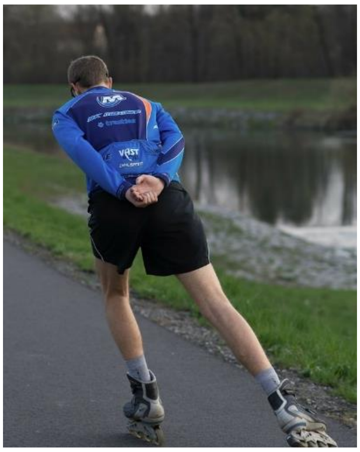



Abbildung 157: links: Lagerung einer Rolle, rechts: Inlineskater
(Altklausur Grundzüge der Maschinenkonstruktion)

Angegebene Werte:

Durchschnittsgeschwindigkeit: v = 30 km/h

Personengewicht G = 800 N

Rollenaußendurchmesser d_R = 80 mm

Gesamtlänge der Achse l_A = 34 mm

Lagerabstand l_L = 16 mm

Abbildung 158: Ersatzbild für eine Rolle

Aufgabe 1:

Alle Rollen von Inlinern oder Skateboards werden mit Lagern ausgestattet. Die Qualität dieser Lager beeinflusst vor allem die Fahrgeschwindigkeit und die Lebensdauer.

a) Ermittle, mit welchem Körpergewicht ein Lager belastet wird, wenn der Skater senkrecht auf beiden Inlinern steht.

b) Begründe, welche Lagerart für diesen Fall geeignet ist.

c) Nenne die Aufgaben der Lager für die Inliner.

d) Analysiere mittels der technischen Zeichnung (s. Abbildung 157157157161), ob es sich bei der Lagerung der Inliner jeweils um Fest- oder Loslager handelt.

e) Berechne die Lagerkräfte in den Lagern A und B. Fertige hierzu zunächst einen Freischnitt an.

f) Dimensioniere die Achse (schwingungsfrei, ohne Kerbe) für eine Fertigung aus dem Stahl E295 mittels eines Festigkeitsnachweises (Materialkennwerte: R_e = 300 MPa, S_F = 2).

g) Berechne die Reibungskraft, die auf eine Rolle wirkt (f = 24 mm).

h) Berechne die Gesamtreibungskraft auf einen Inliner.

i) Eine häufige Versagensursache bei Inlinern ist ein Lagerschaden. Wähle aus dem Lagerkatalog (S. 230) ein passendes Rillenkugellager aus, sodass die Lebensdauer ca. 100.000 h beträgt (d = 5 mm).

Kopfnussaufgabe 1:

Nenne Eigenschaften, die Lager neben der Vermeidung von Reibung und Verschleiß in einer Maschine noch erfüllen müssen.

TIPP	**Tipp: Die Drehzahl kann aus der Geschwindigkeit ermittelt werden.**	
	Alles bearbeitet? ☐	Ergebnis kontrolliert? ☐

Lagerkatalog der Schaeffler Technologies AG & Co. KG

Im Lagerkatalog der Schaeffler Technologies AG & Co. KG auf Seite 230 findet sich eine Übersicht der Rillenkugellager mit den Durchmessern d = 2 – 9 mm. Außerdem sind darin alle weiteren Lagertypen der Firma Schaeffler aufgeführt.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literaturverzeichnis

In den vorliegenden Lehr- und Lernmaterialien *Technische Mechanik* wurden für die Erstellung der Texte, Abbildungen und Tabellen die nachfolgenden Bücher und Internetseiten in Bezug zu den einzelnen Kapiteln verwendet.

Kapitel 1: Abgleich Bildungspläne

Bildungsplan (2016): Bildungsplan des Gymnasiums. Bildungsplan 2016. Naturwissenschaft und Technik (NwT). Profilfach. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.).

Erprobungsfassung für den Bildungsplan Kursstufe Leistungsfach und Basisfach (Stand Juni 2019): Naturwissenschaft und Technik Klassen 11/12. Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.)

Kapitel 4: Einführung

Böge, A. (1990): Mechanik und Festigkeitslehre. 21. verbesserte Auflage, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Herr, H. (1991): Mechanik der festen Körper. Technische Physik. 1. Auflage, Haan-Gruiten: Europa Lehrmittel.

Müller, K. & Alles, H. O. (2003): Statik. Grafische Statik und Trägerlehre. 9. Auflage, Würzburg: Vogel Buchverlag.

Sueddeutsche Zeitung: https://www.sueddeutsche.de/panorama/riga-mehr-als-tote-bei-einkaufs-zentrum-einsturz-1.1824749 (aufgerufen am 21.08.2018)

Kapitel 5: Die Kraft

Böge, A. (1990): Mechanik und Festigkeitslehre. 21. verbesserte Auflage, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Gross, D. (1995) et al.: Technische Mechanik. Band 1: Statik. 6. Auflage: Springer.

Mahringer, W. (2013): Baustatik. Band 1. 1. Auflage, Haan-Gruiten: Europa-Lehrmittel.

Müller, K. & Alles, H. O. (2003): Statik. Grafische Statik und Trägerlehre. 9. Auflage, Würzburg: Vogel Buchverlag.

Skript und Vorlesungsunterlagen „Einführung in die Physik, Teil 1" von Prof. Dr. W. Bolse der Universität Stuttgart, Institut für Halbleiteroptik und Funktionelle Grenzflächen.
(verfügbar unter http://www.ihfg.uni-stuttgart.de/lehre/lehre_ihfg/experimentalphysik_chemie/experimentalphysik_ws1516.html)

Skript und Vorlesungsunterlagen „Technische Grundlagen III: Einführung in die Technische Mechanik" von Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers der Universität Stuttgart, Institut für Mechanik, Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik.

Exkurs: Brücken verbinden

https://www.leifiphysik.de/mechanik/kraefteaddition-und-zerlegung/ausblick/bruecken (aufgerufen am 12.10.2018)

https://www.inst.uni-giessen.de/idm/primarwebquest/wq/wq_bruecken/Begriffserklaerung.pdf (aufgerufen am 12.10.2018)

„Physik: Brücken verbinden“, Unterrichtsentwurf von Prof. Dr. phil. B. Zinn, Skript Biomechanik (Version vom 08.09.2018)

Skript und Vorlesungsunterlagen „Baukonstruktion“ von Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. W. Sobek der Universität Stuttgart, Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren.

Kapitel 6: Drehmomente

Böge, A. (1990): Mechanik und Festigkeitslehre. 21. verbesserte Auflage, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Müller, K. & Alles, H. O. (2003): Statik. Grafische Statik und Trägerlehre. 9. Auflage, Würzburg: Vogel Buchverlag.

https://www.leifiphysik.de/mechanik/drehbewegungen/drehmoment (aufgerufen am 25.08.2018)

https://www.zum.de/dwu/depot/pme200f.gif (aufgerufen am 25.08.2018)

https://www.planet-wissen.de/geschichte/antike/pyramidenbau/index.html (aufgerufen am 25.08.2018)

Exkurs: Unterrichtseinheit „Kran“

https://lehrerfortbildung-bw.de/u_matnatech/nwt/gym/bp2016/fb4/6_ue8/1_kran/ (aufgerufen am 27.11.2019)

Kapitel 7: Statik

Betran et al. (2012): Lernfeld Bautechnik. Grundstufe. 11. Auflage, Hamburg: Handwerk und Technik. ISBN 978-3-582-03520-2

Böge, A. (1990): Mechanik und Festigkeitslehre. 21. verbesserte Auflage, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Gross et al. (1998): Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik. 5. Auflage, Berlin, etc.: Springer.

Mahringer, W. (2013): Baustatik. Band 1. 1. Auflage, Haan-Gruiten: Europa-Lehrmittel.

Müller, K. & Alles, H. O. (2003): Statik. Grafische Statik und Trägerlehre. 9. Auflage, Würzburg: Vogel Buchverlag.

Skript und Vorlesungsunterlagen „Technische Grundlagen III: Einführung in die Technische Mechanik“ von Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers der Universität Stuttgart, Institut für Mechanik, Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik.

https://rechneronline.de/funktionsgraphen/ (aufgerufen am 27.08.2018)

http://deacademic.com/dic.nsf/dewiki/511913 (aufgerufen am 10.09.2018) http://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/physik/unterrichtsmaterialien/waermelehre/ausdehnung/ausdehnung_festkoerper.htm (aufgerufen am 11.09.2018)

Exkurs: Fachwerke

Betran et al. (2012): Lernfeld Bautechnik. Grundstufe. 11. Auflage, Hamburg: Handwerk und Technik. ISBN 978-3-582-03520-2

Skript und Vorlesungsunterlagen „Baukonstruktion" von Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. W. Sobek der Universität Stuttgart, Institut für Leichtbau Entwerfen und Konstruieren.

Skript und Vorlesungsunterlagen „Technische Grundlagen III: Einführung in die Technische Mechanik" von Prof. Dr.-Ing. W. Ehlers der Universität Stuttgart, Institut für Mechanik, Lehrstuhl für Kontinuumsmechanik.

Gross, et al. (2016): Technische Mechanik 1: Statik. 13. aktualisierte Auflage, Berlin, Heidelberg: Springer.

http://www.modellbau-quedlinburg.de/mbq/cms/upload/pdf/Ges-Web.pdf (aufgerufen am 10.10.2018)

http://www.backstein.com/media/kap_2_1_2.pdf (aufgerufen am 10.10.2018)

https://baubeaver.de/fachwerkhaus/ (aufgerufen am 10.10.2018)

Kapitel 8: Festigkeitslehre

Böge, A. (1990): Mechanik und Festigkeitslehre. 21. verbesserte Auflage, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Herr, H. (1991): Mechanik der festen Körper. Technische Physik. 1. Auflage, Haan-Gruiten: Europa Lehrmittel.

Läpple, V. (2016). Einführung in die Festigkeitslehre. Lehr- und Übungsbuch (4., aktualisierte Auflage). Wiesbaden: Springer Vieweg. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10611-9.

Mahringer, W. (2013): Baustatik. Band 1. 1. Auflage, Haan-Gruiten: Europa-Lehrmittel.

Müller, K. (2002): Festigkeitslehre. 2. korrigierte Auflage, Würzburg: Vogel.

Skript Physikalisches Praktikum I, Universität Stuttgart; Fakultät 8 Fachbereich Physik, Lehrstuhl für Mathematik und Physik, Versuch M20 Das Federpendel, verfügbar unter http://www3.physik.uni-stuttgart.de/studium/praktika/ap/pdf_dateien/M20.pdf (aufgerufen am 21.08.2018)

Skript Einführung in die Festigkeitslehre von Professor Dr. rer. nat. S. Schmauder der Universität Stuttgart, Institut für Materialprüfung, Werkstoffkunde und Festigkeitslehre

https://www.metallbau-stahlbau.net/doppel-t-traeger (aufgerufen am 28.08.2019)

Inventor Professional 2013: Einstieg in die FEM-Analyse: https://www.y-outube.com/watch?v=xk1t1OS0R7s (aufgerufen am 29.08.2018)

Exkurs: Leichtbau aus dem 3D-Drucker

Läpple, V. (2016). Einführung in die Festigkeitslehre. Lehr- und Übungsbuch (4., aktualisierte Auflage). Wiesbaden: Springer Vieweg. https://doi.org/10.1007/978-3-658-10611-9.

Kapitel 9: Dynamik

Böge, A. (1990): Mechanik und Festigkeitslehre. 21. verbesserte Auflage, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Herr, H. (1991): Mechanik der festen Körper. Technische Physik. 1. Auflage, Haan-Gruiten: Europa Lehrmittel.

https://physik.cosmos-indirekt.de/Physik-Schule/Drehzahl (aufgerufen am 03.09.2018)

https://autorevue.at/ratgeber/drehmoment-drehzahl-und-leistung (aufgerufen am 03.09.2018)

https://www.greenteam-stuttgart.de/ (aufgerufen am 11.09.2018)

https://www.kfztech.de/kfztechnik/motor/steuerung/leistung.htm (aufgerufen am 04.11.2018)

https://de.wikipedia.org/wiki/Synchronmaschine (aufgerufen am 04.11.2018)

https://de.wikipedia.org/wiki/Gleichstrommaschine#Reihenschlussmaschine (aufgerufen am 04.11.2018)

https://www.lehrerfreund.de/technik/1s/Verbrennungsmotor-2-Drehmoment-und-Leistungsverlauf/3633 (aufgerufen am 04.11.2018)

https://de.wikipedia.org/wiki/Tesla_Roadster_(2008) (aufgerufen am 04.11.2018)

https://industrieanzeiger.industrie.de/technik/fertigung/schon-gut-aufgestellt/ (aufgerufen am 05.11.2018)

Exkurs: Der kleinste Elektromotor der Welt

https://www.experimentis.de/experimente-versuche/elektrizitaet-magnetismus/kleinster-elektromotor-der-welt/ (aufgerufen am 12.10.2018)

https://media2.supermagnete.de/projects/pu3.pdf?__9 (aufgerufen am 12.10.2018)

Kapitel 10: Reibung

Böge, A. (1990): Mechanik und Festigkeitslehre. 21. verbesserte Auflage, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Herr, H. (1991): Mechanik der festen Körper. Technische Physik. 1. Auflage, Haan-Gruiten: Europa Lehrmittel.

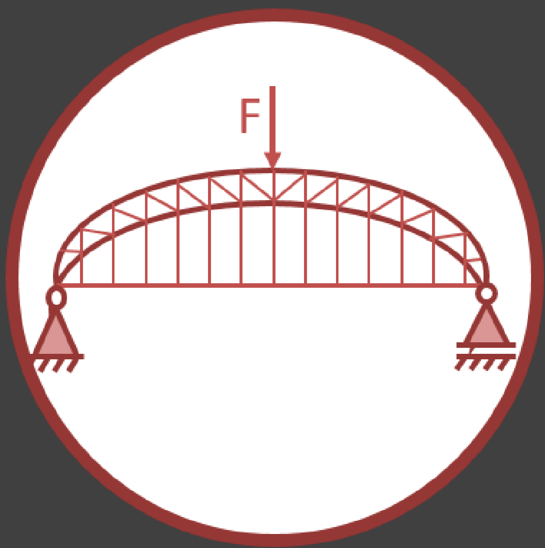
Exkurs: Einen reibungslosen Ablauf durch Lager

Schaeffler Technologies AG & Co. KG: Kleine Wälzlagerkunde (www.schaeffler.de)

Schaeffler Technologies AG & Co. KG (2016): Gleitlager -Für alles, was sich bewegt.

Skript Grundzüge der Maschinenkonstruktion II Kapitel 17 von Professor Dr.-Ing. T. Maier der Universität Stuttgart, Institut für Konstruktionstechnik und Technisches Design

https://www.lehrerfreund.de/technik/1s/waelzlager/3243 (aufgerufen am 15.10.2018)


F